DƯƠNG ĐỨC KIM
ĐỖ DUY ĐỒNG

500 BÀI TOÁN
CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG
11

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

DƯƠNG ĐỨC KIM – ĐỖ DUY ĐỒNG

500 BÀI TOÁN
CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG
11

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Chương I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1. Các hàm số lượng giác

1. Hàm số tuần hoàn

Hàm số f(x) có tập xác định D được gọi là ***hàm số tuần hoàn*** *nếu có số* $T \neq 0$ *sao cho :*

a) $\forall x \in D$, *đều có :* $x - T \in D$ *và* $x + T \in D$

b) $\forall x \in D$, *đều có :* $f(x + T) = f(x)$

Số $T > 0$ ***nhỏ nhất*** *thỏa mãn các tính chất trên được gọi là* ***chu kì*** *của hàm số tuần hoàn f(x).*

2. Hàm số y = sinx

Có tập xác định $D = R$, *là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì* 2π, *lấy mọi giá trị thuộc đoạn* $[-1; 1]$.

3. Hàm số y = cosx

Có tập xác định $D = R$, *là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì* 2π, *lấy mọi giá trị thuộc đoạn* $[-1; 1]$.

4. Hàm số y = tanx

Tập xác định $D = \{x \in R \,/\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$, *là hàm số lẻ tuần hoàn với chu kì* π, *lấy mọi giá trị thuộc R.*

5. Hàm số y = cotx

Tập xác định $D = \{x \in R \,/\, x \neq k\pi,\ k \in Z\}$, *là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì* π, *lấy mọi giá trị thuộc R.*

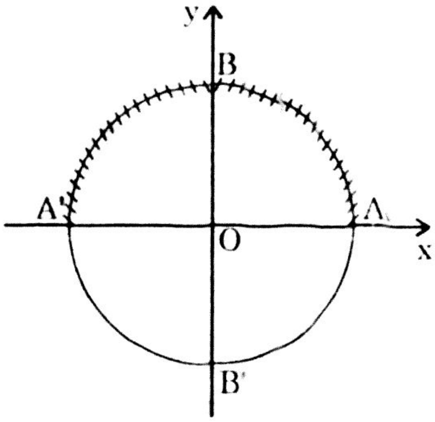
BÀI TẬP

1 Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \sqrt{-\sin x}$ b) $y = \sqrt{\cos x - \sin x}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định $D = \{x \in R/ -\sin x \geq 0\} = \{x \in R/ \sin x \leq 0\}$



Trên đường tròn lượng giác, các cung lượng giác có điểm cuối nằm trên cung $\overset{\frown}{A'B'A}$. Suy ra tập xác định của hàm số đang xét là các số thực x là số đo các cung có điểm cuối thuộc cung $\overset{\frown}{A'B'A}$ nghĩa là :

$$D = \{x \in R/ \pi + k2\pi \leq x \leq 2\pi + k2\pi\}$$
$$= \{x \in R/ (2k + 1)\pi \leq x \leq 2(k + 1)\pi\}.$$

b) $y = \sqrt{\cos x - \sin x} = \sqrt{\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

Tập xác định : $D = \{x \in R/ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0\}$

$$= \{x \in R/ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi\}$$

$$\Leftrightarrow \quad D = \{x \in R/ -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi\},\ k \in Z.$$

2 Tìm tập xác định của hàm số : $y = \dfrac{\tan x + \cot x}{\cos 2x}$.

Hướng dẫn

tanx xác định với $x \in D_1 = \{x \in R/ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.

cotx xác định với $x \in D_2 = \{x \in R/ x \neq k\pi\}$.

$\dfrac{1}{\cos 2x}$ xác định với x sao cho $\cos 2x \neq 0$, nghĩa là

$$\text{với } x \in D_3 = \{x \in R/ 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} = \{x \in R/ x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\}.$$

Tập xác định của hàm số đã cho là :

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{x \in R/ x \neq k\frac{\pi}{4},\ k \in Z\}$$

3 Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \sqrt{\sin x - 1}$

b) $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$

c) $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x - \cos x}}$.

Hướng dẫn

a) $D = \{x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z\}$ b) $D = \varnothing$

c) $D = \{x \in R / x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3},\ k \in Z\}$

d) $D = \{x \in R / \frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in Z\}$.

$\boxed{4}$ Xét tính chẵn lẻ của các hàm số :

a) $y = 2\sin 2x$ **b)** $y = \sin^2 x + \cos x$

c) $y = |\sin x| - \cos x$ **d)** $y = 2\sin 2x + 3\cos 3x$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định của hàm số D = R.

Rõ ràng $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = 2\sin 2(-x) = -2\sin 2x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = 2\sin 2x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số D = R, do đó $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) = \sin^2 x + \cos x = f(x)$$

Hàm số là hàm số chẵn.

c) Tương tự câu b), hàm số đã cho chẵn.

d) Tập xác định D = R nên $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Nhưng $f(-x) = 2\sin(-2x) + 3\cos(-3x) = -2\sin 2x + 3\cos 3x$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{và} \quad f(-x) \neq f(x)$$

Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số lẻ, cũng không phải là hàm số chẵn.

$\boxed{5}$ Xét tính chẵn lẻ của các hàm số :

a) $y = 3x + \sin 3x$ **b)** $y = 2 - x + \sin 2x$

c) $y = \tan x + \cot 2x$ **d)** $y = \cos x + \tan x$

e) $y = \cos(x - 1)$.

Hướng dẫn

a) Hàm số lẻ **b)** Hàm số không chẵn, không lẻ

c) Hàm số lẻ **d)** Hàm số không chẵn, không lẻ

e) Hàm số không chẵn, không lẻ.

$\boxed{6}$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số :

a) $y = \cos(2x - 1)$ **b)** $y = 2\sin x + \cos x$.

Hướng dẫn

a) Đặt $2x - 1 = t$, khi $x \in R$ thì $t \in R$, cost có giá trị nhỏ nhất khi $t = (2k + 1)\pi$ và có giá trị lớn nhất bằng 1 khi $t = k2\pi$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\cos(2x - 1)$ là -1, giá trị lớn nhất c

b) $y = 2\sin x + \cos x = \sqrt{2^2 + 1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\right) = \sqrt{5}\cos($

với $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Giá trị lớn nhất $\text{Max}y = \sqrt{5}$, giá trị nhỏ nhất

$\boxed{7}$ Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

a) $y = 2\sin^2x + 3\sin x\cos x + 5\cos^2x$

b) $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4}$.

Hướng dẫn

a) $2\sin^2$ [illegible]

[illegible]

Hướng dẫn

a) Xét hai yêu cầu của hàm số tuần hoàn đối với hàm số $y = \sin 3x$. Ta thấy : Tập xác định của hàm số là $D = R$, mỗi số $x \in R$ thì $x - T \in R$ và $x + T \in R$ với mọi số $T > 0$.

Ta có $\quad \sin 3x = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

Như vậy nếu đặt $T = \dfrac{2\pi}{3}$, ta có $\sin 3(x + T) = \sin 3x$.

Hàm số $y = \sin 3x$ là hàm số tuần hoàn. Chu kì của hàm số này là $\dfrac{2\pi}{3}$.

Thật vậy, giả sử có số T sao cho $0 < T < \dfrac{2\pi}{3}$ thỏa mãn :

$$\sin 3(x + T) = \sin 3x, \ \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 3(x + T) - \sin 3x = 2\cos\frac{3(x + T) + 3x}{2}\sin\frac{3(x + T) - 3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 3\left(x + \frac{T}{2}\right)\sin\frac{3T}{2} = 0, \ \forall x \in D.$$

Chọn $x = -\dfrac{T}{2}$, ta được $2\cos 0.\sin\dfrac{3T}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3T}{2} = 0$ hoặc $\dfrac{3T}{2} = \pi$

$\Leftrightarrow \quad T = 0$ hoặc $T = \dfrac{2\pi}{3}$ trái giả thiết $0 < T < \dfrac{2\pi}{3}$.

Vậy $T = \dfrac{2\pi}{3}$ là chu kì của hàm số $\sin 3x$.

Ghi chú : Có thể chứng minh được rằng : "Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T > 0$ và a là hằng số thì hàm số $y = f(ax)$ tuần hoàn với chu kì $\dfrac{T}{|a|}$. Chẳng hạn, hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π thì hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn có chu kì $T = \dfrac{2\pi}{5}$. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π thì hàm số $y = \tan 7x$ là hàm số tuần hoàn có chu kì $\dfrac{\pi}{7}$.

b) Giả sử $f(x) = x + \cos x$ tuần hoàn với chu kì là $T > 0$ thì với mọi $x \in D$ ta phải có :

$$f(x + T) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x + T + \cos(x + T) = x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \quad T + \cos(x + T) = \cos x \quad \forall x \qquad (1)$$

Trong (1) cho $x = 0$, ta được : $T + \cos T = 1$ $\quad (*)$

Trong (1) cho $x = \pi$, ta được : $T + \cos(\pi + T) = -1$ $\quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra : $T + T + \cos T + \cos(\pi + T) = 2T = 0$

$\Rightarrow$ $T = 0$ trái với giả thiết $T > 0$.

Vậy hàm số $y = x + \cos x$ không tuần hoàn.

10 Chứng minh các hàm số cho dưới đây là tuần hoàn. Tìm chu kì của mỗi hàm số ấy.

a) $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ **b)** $y = \tan x + \sin 2x$

c) $y = \cot x + \sin 2x$ **d)** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Hướng dẫn

a) Tuần hoàn, chu kì $T = 2\pi$. **b,c)** Tuần hoàn, chu kì $T = \pi$.

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Suy ra hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ tuần hoàn có chu kì $T = \dfrac{\pi}{2}$.

§2. Phương trình lượng giác cơ bản

1. Phương trình sinx = m (1)

Điều kiện có nghiệm : $|m| \le 1$.

Khi đó : $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in Z, \end{array}\right.$

trong đó $\alpha \in R$ *mà* $\sin\alpha = m$.

2. Phương trình cosx = m (2)

Điều kiện để (2) có nghiệm : $|m| \le 1$.

Khi đó : $\cos x = m \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi,\ k \in Z,$

$\alpha \in R$ *sao cho* $\cos\alpha = m$.

3. Phương trình tanx = m

$\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in Z,$

$\alpha \in R$ *thỏa* $\tan\alpha = m$.

$\boxed{15}$ Giải phương trình :

a) $\tan\left[\frac{\pi}{4}(\sin x + 1)\right] = 1 \qquad (1)$ **b)** $\cot\left[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)\right] = 1 \qquad (2)$

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định : $\frac{\pi}{4}(\sin x + 1) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ hay $\frac{\pi}{4}\sin x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Với điều kiện đó thì

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\sin x + 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}\sin x = k\pi \Leftrightarrow k = 0$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi, \quad m \in Z.$$

b) $(2) \Leftrightarrow \cot\left[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)\right] = \cot\frac{\pi}{4}$ với đk $\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x) \neq k\pi$.

Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 + 4k$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + 4k}{\sqrt{2}}, \; k \in Z.$$

Phương trình cuối có nghiệm khi $\left|\frac{1 + 4k}{\sqrt{2}}\right| \leq 1 \Rightarrow k = 0.$

Khi đó ta có : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + m2\pi, \quad m \in Z$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi, \; m \in Z. \end{array}\right.$$

$\boxed{16}$ Giải phương trình :

a) $\cos[\pi\sin x] = 1$ **b)** $\sin(\pi\cos 2x) = 1$

c) $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\sin\left[\pi\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 1.$

Hướng dẫn

a) $x = m\pi, \quad m \in Z.$

b) $x = \pm\frac{\pi}{12} + m\pi, \quad m \in Z.$

c) $x = \frac{7\pi}{12} + m\pi$ hoặc $x = \frac{11\pi}{12} + m\pi, \quad m \in Z.$

d) $x = \frac{5\pi}{12} + m2\pi$ hoặc $x = \frac{13\pi}{12} + m\pi, \quad m \in Z.$

17 Giải và biện luận theo tham số m phương trình lượng giác

$$3\tan x - m = (m + 2)\tan x \qquad (1)$$

Hướng dẫn

$(1) \Leftrightarrow (m - 1)\tan x = -m$

- Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$, ta có $\tan x = \frac{m}{1 - m}$

  $\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$, trong đó $\tan\alpha = \frac{m}{1 - m}$ và $k \in Z.$

- Nếu $m = 1$ phương trình vô nghiệm.

18 Giải phương trình :

a) $\tan 3x \tan x = 1 \quad (1)$ **b)** $\tan(x + 1)\cot(2x + 3) = -1 \quad (2)$

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định : $3x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad x \neq k\frac{\pi}{2}$ tương đương $x \neq k\frac{\pi}{6}, k \in Z.$

$(1) \Rightarrow \tan 3x = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$ thỏa mãn ĐKXĐ.

b) ĐKXĐ : $x + 1 \neq k\frac{\pi}{2}, \quad 2x + 3 \neq k\frac{\pi}{2}.$

$(2) \Rightarrow \cot(2x + 3) = -\cot(x + 1) = \cot(-x - 1)$

$\Rightarrow 2x + 3 = -x - 1 + k\pi$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{3} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ thỏa mãn điều kiện xác định.

19 Giải các phương trình :

a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ **b)** $\tan\left[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)\right] = 1.$

1)

. k và m sao cho :

g khoảng đã cho là

$_3 = 75^0$.

Hướng dẫn

$$(1) \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x + m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\cos 2x + m - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = \dfrac{1}{2} & (*) \\ \cos 2x = \dfrac{1-m}{2} & (**) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có hai nghiệm trên đoạn $[0; \pi]$ là $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ và $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Do đó để (1) có đúng hai nghiệm trên đoạn $[0; \pi]$ thì phương trình (**) phải vô nghiệm hoặc có hai nghiệm trùng với các nghiệm của phương trình (*).

(**) vô nghiệm nếu : $\left|\dfrac{1-m}{2}\right| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 3 \end{array}\right.$

Phương trình (**) có các nghiệm $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, nghĩa là :

$$\begin{array}{l} \cos 2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1-m}{2} \\ \cos 2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1-m}{2} \end{array} \Leftrightarrow m = 0.$$

Kết luận : Với $m = 0$ hoặc $m < -1$ hoặc $m > 3$, phương trình (1) có đúng hai nghiệm trong đoạn $[0; \pi]$.

§3. Một số dạng phương trình lượng giác đơn giản

1. Phương trình bậc hai đối với một hàm lượng giác

Phương trình có dạng :

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0, \quad a, b, c \in R, a \neq 0$$

f(x) là hàm số có một trong các dạng sinu(x), cosu(x), tanu(x), cotu(x).

Cách giải :

Đặt ẩn phụ f(x) = t. Giải phương trình theo ẩn t : $at^2 + bt + c = 0$ *rồi giải phương trình lượng giác cơ bản đối với mỗi nghiệm của phương trình theo t.*

BÀI TẬP

23 Giải phương trình : **a)** $12\cos^2 x + \sin x - 11 = 0$ (1)

b) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$ (2)

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow 12(1 - \sin^2 x) + \sin x - 11 = 0$

$\Leftrightarrow 12\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Đặt $\sin x = t$ với $|t| \le 1$ ta có :

$$\begin{cases} 12t^2 - t - 1 = 0 \\ |t| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

- Với $t = \dfrac{1}{3}$, ta có $\sin x = \dfrac{1}{3}$ với các nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in Z,\ \sin\alpha = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Với $t = -\dfrac{1}{4}$, ta có $\sin x = -\dfrac{1}{4}$ với các nghiệm :

$$\left[\begin{array}{l} x = \beta + k2\pi \\ x = \pi - \beta + k2\pi,\ k \in Z,\ \beta \text{ là góc sao cho } \sin\beta = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

b) $(2) \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$

Giải như câu a, ta được kết quả : $t = \cos x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z.$$

24 Giải phương trình : **a)** $\tan^2 x - 2\tan x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$ (1)

b) $\cot^2 x - \left(2 + \sqrt{2}\right)\cot x + 1 + \sqrt{2} = 0$ (2)

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định : $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Đặt $t = \tan x$.

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2\sqrt{3} - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{3},\quad t_2 = 2 - \sqrt{3}$

- Với $t = \sqrt{3}$, ta có : $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
1C/ 3038

- Với $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, ta có : $x = \alpha + k\pi$, trong đó $\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

b) Làm tương tự câu a.

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $\quad x = \beta + k\pi$ với $\cot\beta = \sqrt{2} + 1$.

25 Giải phương trình : $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\dfrac{\pi}{4}$ (1)

Hướng dẫn

$$(1) \Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

26 Giải phương trình :

a) $2 + \cos 2x = -5\sin x$ **b)** $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

c) $2 - 3\cos x + \cos 2x = 0$ **d)** $\cos 2x = 2 + 5\cos x$.

Hướng dẫn

a) Thay $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. *Đáp số* : $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$.

b) *Đáp số* : $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

c) Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. *Đáp số* : $x = k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

d) *Đáp số* : $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

2. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Phương trình có dạng : $a\cos x + b\sin x = c$, với $a, b, c \in R$

Cách giải :

Chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ để đưa phương trình về dạng :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

với α là góc mà $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Nếu $x = \pi(2k + 1)$ *không phải là nghiệm ta có thể biểu diễn cosx và sinx theo tan* $\dfrac{x}{2}$ *rồi giải phương trình theo tan* $\dfrac{x}{2} = t$.

Phương trình có nghiệm nếu $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - c^2 \ge 0$.

27 Giải phương trình :

a) $\sin x + \cos x = 1$ (1) **b)** $3\cos 2x - 4\sin 2x = 1$ (2)

Hướng dẫn

a) (1) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{1^2 + 1^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\cos x\right) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

b) (2) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{3^2 + 4^2}\left(\dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\cos 2x - \dfrac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\sin 2x\right) = 1$

$\Leftrightarrow \quad \cos(2x + \alpha) = \dfrac{1}{5}$ với $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \quad 2x + \alpha = \pm\arccos\dfrac{1}{5} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{5} + k\pi \\ x = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{5} + k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

28 Giải phương trình :

a) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}$ (1) **b)** $\sin 2x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$ (2)

Hướng dẫn

a) (1) $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{24} + k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

b) (2) $\Leftrightarrow \sin2x + \frac{1 - \cos2x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos2x - 2\sin2x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\cos2x - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + \alpha) = 0 \quad \text{với} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

29 Giải phương trình :

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$ **b)** $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{2}$

c) $5\cos2x - 12\sin2x = 13$.

Hướng dẫn

a) $x = \alpha + k2\pi$, với α là cung có $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

b) $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$, $x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi$.

c) $x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$, trong đó $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

30 Giải các phương trình :

a) $\sin6x + \sqrt{3}\cos6x = 2$ **b)** $\sin2x - 3\cos2x = 3$

c) $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 3 + \cos2x$.

Hướng dẫn

a) $\Leftrightarrow \cos\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3}$

b) $\Leftrightarrow \quad \sin(2x - \alpha) = \sin\alpha$, với $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow \quad x = \alpha + k\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

c) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin 2x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$

Vì $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 < \left(3 - \sqrt{2}\right)^2$, suy ra phương trình vô nghiệm

31 Cho phương trình : $\cos x + m\sin x = 2$ (1)

a) Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

b) Xác định các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Hướng dẫn

a) Với $m = \sqrt{3}$ thì (1) có các họ nghiệm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in Z$.

b) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$1^2 + m^2 \geq 2^2. \quad \Leftrightarrow \quad |m| \geq \sqrt{3}.$$

32 Cho phương trình : $(m + 2)\sin x - 2m\cos x = 2m + 2$ (1)

trong đó m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

Hướng dẫn

a) Vì $x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ không nghiệm đúng phương trình (1) nên $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$. Ta sử dụng công thức :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}.$$

Đặt $\tan\dfrac{x}{2} = t$, ta được phương trình :

$$f(t) = t^2 - (m + 2)t + 2m + 1 = 0 \qquad (*)$$

Với $m = -2$, ta được $t = \pm\sqrt{3}$.

Các họ nghiệm của (1) là : $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

b) Để (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, tương đương $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ tương đương $t = \tan\frac{x}{2} \in [-1; 0]$.

Để (*) có một nghiệm thuộc $[-1; 0]$ ta phải có :

$$f(0).f(1) = (2m + 1)(3m + 4) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}.$$

Để (*) có hai nghiệm thuộc $[-1; 0]$ ta phải có :

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4m \ge 0 \\ af(-1) = 3m + 4 \ge 0 \\ af(0) = 2m + 1 \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} = \frac{m+2}{2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \text{ hoặc } m \ge 4 \\ m \ge -\frac{4}{3} \\ m \ge -\frac{1}{2} \\ -4 \le m \le -2 \end{cases} \Rightarrow \text{mâu thuẫn !}$$

Tóm lại : Để (1) có nghiệm ta phải có : $-\frac{4}{3} \le m \le -\frac{1}{2}$.

3. Phương trình bậc hai thuần nhất đối với sinx và cosx

Phương trình có dạng :

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d, \quad \text{với } a, b, c \ne 0$$

Cách giải :

Chia hai vế cho $\cos^2 x$ *hoặc* $\sin^2 x$ *để được phương trình bậc hai đối với* $\tan x$ *hoặc* $\cot x$*. Ta cũng có thể giải bằng cách dùng công thức hạ bậc :*

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

để đưa phương trình về dạng bậc nhất đối với $\sin 2x$ *và* $\cos 2x$*.*

33 Giải phương trình : $\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ (1)

Hướng dẫn

CÁCH 1 : Nhận thấy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không nghiệm đúng (1) nên chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ thì được :

$$\tan^2x + 3\tan x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -1 \quad \text{hoặc} \quad \tan x = -2.$$

- Với $\tan x = -1$, ta được nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$.
- Với $\tan x = -2$, ta được nghiệm $x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = -2,\ k \in Z$.

Vậy (1) có các nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = -2$, $k \in Z$.

CÁCH 2 : Dùng các công thức hạ bậc ta được :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\sin 2x + 1 + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 3\sin 2x = -3$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\frac{1}{\sqrt{10}} + \sin 2x\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x-\alpha) = \cos\beta, \quad \text{với} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},\quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \alpha = \pm\beta + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\alpha-\beta}{2} + k\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Ghi chú : Với $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ thì $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$.

34 Giải phương trình : **a)** $12\sin^2x + 3\sin 2x - 2\cos^2x = 2$ (1)

b) $2\sin^2x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2x = -2$ (2)

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định : $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Chia hai vế cho $\cos^2x$, ta được :

$$(1) \Leftrightarrow 12\tan^2x + 6\tan x - 2 = \frac{2}{\cos^2 x} = 2(1+\tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 5\tan^2x + 3\tan x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \text{ với } \tan\alpha = \dfrac{2}{5},\ k \in Z. \end{array}\right.$$

b) Điều kiện xác định : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Chia hai vế cho $\cos^2x$ thì được :

$$(1) \Leftrightarrow 2\tan^2x - 5\tan x - 8 = -2(1 + \tan^2x)$$

$$\Leftrightarrow 4\tan^2x - 5\tan x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2 \\ \tan x = -\frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \text{ với } k \in Z,\ \tan\alpha = 2,\ \tan\beta = -\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

35 Giải và biện luận theo tham số m, phương trình :

$$m\sin^2x - (2m + 1)\sin x\cos x + (m + 1)\cos^2x = 0 \qquad (1)$$

Hướng dẫn

- Nếu $m = 0$ thì (1) có dạng :

$$-\sin x\cos x + \cos^2x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z \end{array}\right.$$

- Nếu $m \neq 0$, với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế cho $\cos^2x$ ta được :

$$m\tan^2x - (2m + 1)\tan x + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{m+1}{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi, \text{ trong đó } \tan\alpha = \frac{m+1}{m},\ k \in Z. \end{array}\right.$$

36 Giải phương trình : **a)** $8\sin^2x + 6\cos^2x - 13\sin 2x = 0$

b) $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2x = 4$

c) $2\sin^2x + 3\cos^2x = 5\sin x\cos x$.

Hướng dẫn

a) Chia cho $\cos^2x$ thì được : $4\tan^2x - 13\tan x + 3 = 0$

Đáp số : $x = \alpha + k\pi$, với $\tan\alpha = 3$; $\quad x = \beta + k\pi$, với $\tan\beta = \frac{1}{4}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \alpha + k\pi$ với $\tan\alpha = \frac{3}{2}, k \in Z.$

37 Giải và biện luận theo tham số m, phương trình :

$$2\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x + m = 0$$

Hướng dẫn

Dùng công thức hạ bậc ta đi đến phương trình :

$$-\sin 2x + 3\cos 2x = 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x - \alpha) = \frac{2m+1}{\sqrt{10}} \quad \text{với} \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

- Nếu $\left|\frac{2m+1}{\sqrt{10}}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad m < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}$ hoặc $m > \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$

phương trình vô nghiệm.

- Nếu $\frac{-1-\sqrt{10}}{2} \le m \le \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$ ta có :

$$2x - \alpha = \pm\beta + k2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\alpha+\beta}{2} + k\pi \\ x = \frac{\alpha-\beta}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

trong đó $\cos\beta = \frac{2m+1}{\sqrt{10}}, k \in Z.$

4. Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx

Phương trình có dạng :

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0; \quad a, b, c \in R$$

Cách giải :

Đặt $\sin x + \cos x = t,$ *với điều kiện* $|t| \le \sqrt{2}$

$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2},$ *ta đi đến phương trình* $bt^2 + 2at + 2c - b = 0 \quad (*)$

Giải phương trình (*), loại các nghiệm t mà $|t| > \sqrt{2}$

rồi giải các phương trình $\sin x + \cos x = t_i$ *với* $|t_i| \le \sqrt{2}.$

Ghi chú : *Phương trình dạng* $a(\cos x - \sin x) + b\sin x\cos x + c = 0$ *cũng giải bằng phương pháp tương tự.*

38 Giải các phương trình : **a)** $2(\cos x + \sin x) - 4\sin x\cos x = 1$ (1)

b) $12(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 12 = 0$ (2)

Hướng dẫn

a) Đặt $\cos x + \sin x = t$, với $|t| \le \sqrt{2}$ ta được :

$$(1) \Leftrightarrow 2t - 4\frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} \pm \beta + k2\pi,\ k \in Z \end{array}\right.$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

b) Đặt $\sin x - \cos x = t$, với $|t| \le \sqrt{2}$, $\sin x\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$ ta được :

$$t^2 + 12t - 13 = 0 \Rightarrow t_1 = -13 \text{ (loại)},\quad t_2 = 1.$$

Giải phương trình : $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

39 Giải các phương trình :

a) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0$

b) $\sin x - \cos x + 4\sin x\cos x + 1 = 0$

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$

d) $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

Hướng dẫn

a) $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + \alpha + k2\pi$

$x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + k2\pi$ với $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) $x = k2\pi$, $x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi$.

c) $\sin^3x + \cos^3x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = 1$

$x = k2\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

d) $x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi$ với $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$

40 Giải các phương trình :

a) $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$ **b)** $\sin x + \cos x - \sin 2x = -1.$

Hướng dẫn

a) $\Leftrightarrow \quad \cos x + \sin x + \sin x\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi,\ k \in Z.$

b) *Đáp số* : $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi, \quad k \in Z.$

41 Cho phương trình : $m(\sin x + \cos x) + \sin 2x + m - 1 = 0$ (1)

a) Giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Hướng dẫn

a) Đặt $\sin x + \cos x = t$, với điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$ ta được :

(1) $\Leftrightarrow \quad f(t) = t^2 + mt + m - 2 = 0$ (2)

Với $m = 2$, ta được : $t^2 + 2t = 0,\ |t| \le \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

b) Phương trình (1) có nghiệm khi (2) có nghiệm thỏa $|t| \le \sqrt{2}$. Điều này xảy ra khi :

$$f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-m\sqrt{2} + m\right)\left(m\sqrt{2} + m\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ne 0$$

$$\text{hoặc} \quad \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 8 \ge 0 \\ af\left(\sqrt{2}\right) = m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ af\left(-\sqrt{2}\right) = -m\sqrt{2} + m \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le \frac{S}{2} = -\frac{m}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m = 0$$

Vậy, với mọi $m \in R$ phương trình (1) luôn có nghiệm.

5. Một số phương trình lượng giác đơn giản khác

a) Phương trình chứa nhiều hàm lượng giác của các cung khác nhau

Để giải các phương trình loại này ta cố gắng biến đổi để đưa phương trình đã cho thành phương trình chứa một hàm số lượng giác của một góc hoặc phương trình lượng giác đơn giản đã biết ở các mục trên.

42 Giải phương trình : $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$ (1)

Hướng dẫn

Điều kiện : $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) + \frac{1}{2}\sin 4x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Các họ nghiệm đã nhận được thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình đã cho.

43 Giải phương trình : $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin 2x$ (1)

Hướng dẫn

Điều kiện : $\cos x \neq 0$, $\tan x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = (\cos x + \sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = (\cos x + \sin x)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 + \cot^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cot^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]\left[\cot^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\right] = 0$$

Vì $\cot^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0$ với mọi x nên

$$(1) \Leftrightarrow \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z.$$

44 Giải phương trình : **a)** $\tan x - \tan 2x = \sin x$ (1)

b) $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$ (2)

Hướng dẫn

a) Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\cos 2x \neq 0$ tương đương $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{2\cos x}{\cos 2x} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos 2x - 2\cos^2 x - \cos x\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ 2\cos^3 x - \cos x + 1 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 2\cos x + 1) = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos x + 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi.$$

b) Thay $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, rút gọn ta được :

$$(2) \Leftrightarrow \sin x(4\cos x + \sin x - 6) = 0$$

Vì $4^2 + 1^2 < 6^2$ nên phương trình trong ngoặc vô nghiệm, do đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z.$$

45 Giải các phương trình : **a)** $\dfrac{3(\cos x + \cot x)}{\cot x - \cos x} = 2 + 2\sin x$ (1)

b) $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$ (2)

Hướng dẫn

a) ĐK : $\sin x \neq 0$, $\cot x \neq \cos x$ tương đương $x \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$

$(1) \Rightarrow (1 + \sin x)(1 + 2\sin x) = 0$

$\Rightarrow \sin x = -1$ (loại) hoặc $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z.$

b) ĐK : $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x \neq k\pi,\ k \in Z.$

Đáp số : $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{5\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z.$

46 Giải phương trình : $\dfrac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$ (1)

Hướng dẫn

Điều kiện xác định : $\begin{cases}\cot 2x - \cos 2x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{4}$

Khi đó : $(1) \Rightarrow \cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x = 2\cot 2x - 2\cos 2x$

$$\Rightarrow \cos 2x\left(3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x\right) = 0$$

Từ điều kiện $\cos 2x \neq 0$, nên (1) dẫn tới :

$$3 + \frac{1}{\sin 2x} + 2\sin 2x = 0$$

$\Rightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -1$ hoặc $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + k\pi$.

47 Giải các phương trình : a) $\tan 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}\cot x$ (1)

b) $\sin 3x + \cos 3x + 2\cos x = 0$ (2)

Hướng dẫn

a) ĐK : $\cos 2x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$ tương đương $x \neq k\frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

Đáp số : $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$.

b) Ta có : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

(2) $\Leftrightarrow$ $3\sin x - 4\sin^3 x + 4\cos^3 x - \cos x = 0$.

Vì $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ thì được :

$$\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

Đáp số : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$.

b) Phương trình lượng giác tương đương với hệ phương trình lượng giác một ẩn

48 Giải phương trình : $2(\cos 6x + \cos x) = 4 + \cos^2\frac{3x}{2}$ (1)

Hướng dẫn

Vì $\cos 6x \leq 1$, $\cos x \leq 1$ nên $2(\cos 6x + \cos x) \leq 4$

Vế phải : $4 + \cos^2\frac{3x}{2} \geq 4$ $\forall x$. Vì vậy x nghiệm đúng phương trình (1) khi và chỉ khi x đồng thời thỏa mãn các phương trình :

$$\begin{cases} 2(\cos 6x + \cos x) = 4 \\ 4 + \cos^2\frac{3x}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = 1 \\ \cos x = 1 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Bởi vì hệ (A) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm.

49 Giải phương trình : $\sin x\cos 4x\cos 8x = 1$ (1)

Hướng dẫn

Từ điều kiện : $|\sin x| \leq 1$, $|\cos 4x| \leq 1$, $|\cos 8x| \leq 1$ nên suy ra :

$$(1) \Leftrightarrow \quad (A) \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos 4x \cos 8x = -1 \end{cases} \quad \text{hoặc } (B) \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos 4x \cos 8x = 1 \end{cases}$$

Hệ (A) vô nghiệm, hệ (B) có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in Z$.

50 Giải phương trình : $4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 3\tan^2 x = 4\sin x - 2$ (2)

Hướng dẫn

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

$$(1) \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x + 1 + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)^2 + \left(\sqrt{3}\tan x - 1\right)^2 = 0$$

Vế trái phương trình cuối là tổng của hai hạng tử không âm. Vế trái chỉ bằng 0 nếu cả hai hạng tử bằng 0. Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2} & (*) \\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} & (**) \end{cases}$$

Phương trình (*) có hai họ nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in Z$.

Họ nghiệm $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ không phải là nghiệm của (**). Từ đó suy ra (1) chỉ có một họ nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $k \in Z$.

Chương II

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A. TỔ HỢP

Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

1. Hai quy tắc đếm cơ bản

a) Quy tắc cộng :

Nếu có m cách chọn đối tượng A, n cách chọn đối tượng B và cách chọn đối tượng này không trùng với bất kì cách chọn nào trong các cách chọn đối tượng kia thì có m + n cách chọn đối tượng A hoặc B.

Nói cách khác : Tập hợp hữu hạn A có N(A) phần tử, tập hợp hữu hạn B có N(B) phần tử, các tập hợp A và B không giao nhau thì số phần tử của $A \cup B$ là :

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

Ghi chú : *Nếu kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập hợp hữu hạn X, ta có :*

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

b) Quy tắc nhân :

Nếu một công việc phải thực hiện qua hai bước. Bước thứ nhất có thể thực hiện theo m cách, bước thứ hai có thể thực hiện theo n cách, thì số cách hoàn thành công việc nói trên là $m \times n$ cách.

2. Hoán vị

Tập hợp hữu hạn A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi cách sắp thứ tự các phần tử của A được gọi là một ***hoán vị*** *của n phần tử đó.*

Định lí. *Số hoán vị khác nhau của n phần tử là :*

$$P_n = n(n-1)(n-2)...2.1 = n!$$

3. Chỉnh hợp

Một tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$ và một số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Mỗi hoán vị của tập hợp con k phần tử của A được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n phần tử*** *của A.*

Định lí. *Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là :*

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. Tổ hợp

*Cho tập hợp hữu hạn A và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Mỗi tập hợp con của A gồm k phần tử được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử** của A.*

Định lí. *Số tổ hợp chập k của n phần tử là :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!} \qquad (\text{Quy ước} : 0! = 1)$$

Các tính chất khác :

- *Với* $k, n \in Z$, $0 \leq k \leq n$ *thì* $C_n^k = C_n^{n-k}$
- *Với* $k, n \in Z$, $1 \leq k \leq n$ *thì* $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

5. Công thức nhị thức Niutơn

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

6. Tam giác Pat-can

Sắp các hệ số của nhị thức Niutơn ứng với $n = 0, 1, 2, \dots$ thành bảng gọi là tam giác Pat-can :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

. . . .

BÀI TẬP

51 Một cửa hàng bán thức ăn sáng có hai loại thức ăn, một loại có nước lèo và loại không có nước lèo. Loại có nước lèo có các món : phở gà, phở bò, mì vằn thắn, bún bò. Loại không có nước lèo có các món : bánh mì, xôi gà, xôi đậu, bánh cuốn, bánh chưng. Hỏi thực khách vào cửa hàng để dùng món ăn sáng thì có bao nhiêu cách lựa chọn ?

Hướng dẫn

Có 4 cách chọn một món ăn có nước lèo và 5 cách chọn một món ăn không có nước lèo. Mỗi cách chọn loại này không trùng với một cách chọn loại kia. Theo quy tắc cộng, khách ăn có : $4 + 5 = 9$ cách chọn.

52 Trong một buổi thi hát, thí sinh phải hát một bài hát có nói về mùa xuân hoặc mùa hè. Có 15 bài hát về mùa xuân và 12 bài hát về mùa hè. Hỏi thí sinh có bao nhiêu cách chọn, biết rằng trong các bài hát, không có bài nào nói về cả hai mùa xuân, hè.

Hướng dẫn

Áp dụng quy tắc cộng. Có 27 cách chọn.

53 Đường bộ từ tỉnh A đến tỉnh B phải đi qua cầu C. Từ A đến C có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường.

a) Có bao nhiêu con đường từ A đến B.

b) Đi bằng đường bộ thì có bao nhiêu cách đi từ A đến B rồi lại từ B trở về A.

Hướng dẫn

a) Theo quy tắc nhân, ta tính được số con đường từ A đến B là : $3 \times 4 = 12$ đường.

b) Số cách đi từ A đến B rồi lại trở về A là : $12 \times 12 = 144$ cách.

54 Một người dự định ăn trưa với ba món ăn : món khô, món canh và món tráng miệng. Một cửa hàng cơm có 10 loại thức ăn khô, 3 loại canh và 4 loại tráng miệng. Hỏi khi vào cửa hàng cơm nói trên thì người ăn có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

Hướng dẫn

Ta có : $10 \times 3 \times 4 = 120$ cách chọn.

55 Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có hai chữ số. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn có hai chữ số với các chữ số khác nhau.

Hướng dẫn

a) Để có một số có hai chữ số ta phải chọn chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị. Để có một số chẵn có hai chữ số ta có 9 cách chọn chữ số hàng chục (chọn một trong 9 chữ số 1, 2, 3, ..., 9) và 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị (chọn một trong các chữ số 0, 2, 4, 6, 8).

Vậy ta có : $9 \times 5 = 45$ số chẵn có hai chữ số.

b) Có 4 số tự nhiên có hai chữ số giống nhau là 22, 44, 66, 88.

Vậy số các số chẵn có hai chữ số khác nhau là : $45 - 4 = 41$ số.

Ghi chú : Cũng có thể tìm số các số chẵn có hai chữ số khác nhau như sau :

- Số có chữ số hàng chục là chữ số lẻ, chữ số hàng đơn vị chẵn là : $5 \times 5 = 25$.
- Số hai chữ số có chữ số hàng chục là chữ số chẵn là 4 (2, 4, 6, 8). Chữ số hàng đơn vị là chữ số chẵn khác với chữ số hàng chục là $5 - 1 = 4$.

Số các số chẵn có hai chữ số khác nhau, chữ số hàng chục chẵn là $4 \times 4 = 16$ số.

Số các số chẵn có hai chữ số khác nhau là : $5 \times 5 + 4 \times 4 = 41$ số.

56 Một lớp học có 21 học sinh trai, 24 học sinh gái. Có bao nhiêu cách chọn ban đại diện lớp gồm một trai, một gái.

Hướng dẫn

Theo quy tắc nhân, số cách chọn ban đại diện lớp là :

$$21 \times 24 = 504 \text{ cách.}$$

57 Có 12 người khách xếp hàng vào tham quan một nhà bảo tàng. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau, nếu :

a) Xếp hàng một. **b)** Xếp hàng đôi.

Hướng dẫn

a) Mỗi cách xếp hàng một là một hoán vị của tập hợp 12 phần tử. Số hoán vị khác nhau của 12 phần tử là :

$$P_{12} = 12! = 12.11.10...2.1 = 479001600$$

b) Để xếp hàng đôi vào cửa ta chọn hai người hàng đầu, hai người hàng thứ hai, hai người hàng thứ ba, v.v...

Hai người ở mỗi hàng lại có thể theo thứ tự bên trái, bên phải khác nhau. Do đó, số cách chọn hai người ở hàng đầu là số chỉnh hợp chập 2 của 12; số cách chọn hai người xếp hàng thứ hai là số chỉnh hợp chập 2 của 10; số cách chọn hai người đứng hàng thứ ba là số chỉnh hợp chập 2 của 8, ... Theo quy tắc nhân, số cách xếp hàng đôi của 12 người khách vào bảo tàng là :

$$A = A_{12}^2.A_{10}^2.A_8^2.A_6^2.A_4^2.A_2^2 = 12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$$

$$= 12! = 479001600 \text{ cách.}$$

58 Cho tập hợp A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà các chữ số thuộc tập hợp A.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà các chữ số thuộc tập hợp A và khác nhau từng đôi một.

c) Từ các chữ số thuộc A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số mà hai chữ số đứng cạnh nhau phải khác nhau.

d) Từ các chữ số thuộc A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số là một số chẵn.

Hướng dẫn

a) Có 5 cách chọn chữ số hàng nghìn (chữ số đầu phải khác 0). Có 6 cách chọn chữ số hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị.

Số số tự nhiên có bốn chữ số từ tập hợp A (các chữ số trong một số có thể giống nhau), theo quy tắc nhân là :

$$N_1 = 5.6.6.6 = 1080 \text{ số}.$$

b) Có 5 cách chọn chữ số hàng nghìn, 5 cách chọn chữ số hàng trăm, 4 cách chọn chữ số hàng chục và 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị. Số các số tự nhiên cần tìm là :

$$N_2 = 5.5.4.3 = 300 \text{ số}.$$

c) Có 5 cách chọn chữ số hàng nghìn, 5 cách chọn chữ số hàng trăm, 5 cách chọn chữ số hàng chục và 5 cách chọn chữ số hàng đơn vị. Số các số tự nhiên có tính chất đòi hỏi là :

$$N_3 = 5.5.5.5 = 625 \text{ số}.$$

d) Có 5 cách chọn chữ số hàng nghìn, 6 cách chọn chữ số hàng trăm, 6 cách chọn chữ số hàng chục và 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị (số chẵn phải có chữ số hàng đơn vị là một trong các chữ số 0, 2, 4) là :

$$N_4 = 5.6.6.3 = 540 \text{ số}.$$

59 Xác định số tự nhiên n, biết rằng : $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} = 132$, $k \in N$.

Hướng dẫn

Thay $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$,

$P_{n+2} = (n+2)(n+1)n...2.1 = (n+2)!$

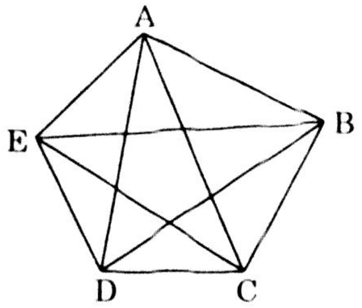
$P_{n-k} = (n-k)(n-k-1)...2.1 = (n-k)!$, ta được :

$$VT = \frac{(n+2)!}{(n-k)!n(n-1)...(n-(k-1))} = 132$$

$\Rightarrow \quad (n+1)(n+2) = 132 \quad \Leftrightarrow \quad n = 10.$

60 Một đa giác lồi n cạnh ($n \geq 4$). Hãy xác định số đường chéo và số giao điểm của các đường chéo (không kể giao điểm hai đường chéo là đỉnh của đa giác).

Hướng dẫn



a) Đa giác lồi n cạnh thì có n đỉnh (Ví dụ ngũ giác ABCDE có 5 đỉnh A, B, C, D, E). Nối hai đỉnh với nhau ta có một đường chéo hoặc một cạnh. Suy ra số đường chéo của đa giác lồi n cạnh là :

$$N = C_n^2 - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

b) Vì đa giác lồi nên mỗi bốn đỉnh của đa giác là một tứ giác lồi có hai đường chéo cắt nhau tại một điểm khác với đỉnh của đa giác. Vậy số giao điểm của các đường chéo (ngoài các đỉnh) của đa giác là :

$$M = C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}.$$

61 **a)** Cho số tự nhiên $n = p_1.p_2...p_k$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố khác nhau từng đôi. Hỏi có bao nhiêu số lớn hơn 1, nhỏ hơn n là ước số của n.

b) Cho một họ gồm m đường thẳng song song với nhau và một họ n đường thẳng song song cắt họ đường thẳng trên. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành bởi hai họ đường thẳng đã cho.

Hướng dẫn

a) Số các ước số của n lớn hơn 1 nhỏ hơn n bằng số các tập hợp con của tập hợp $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ có từ 1 phần tử đến k – 1 phần tử. Số các ước đó là :

$$N = C_k^1 + C_k^2 + ... + C_k^{k-1}$$

b) Cứ hai đường thẳng của họ thứ nhất hợp với hai đường thẳng của họ thứ hai tạo thành một hình bình hành. Do đó, số hình bình hành được tạo thành là :

$$M = C_m^2.C_n^2 = \frac{m!n!}{(2!)^2.(m-2)!(n-2)!}.$$

62 Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n. Chứng minh các hệ thức sau :

a) $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$.

b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$, $k < n$

c) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$.

Hướng dẫn

a) Theo công thức :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!} = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$$

b) Áp dụng công thức : $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ một số lần :

$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$, $C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$ ... ta được hệ thức cần chứng minh.

c) Áp dụng công thức về tổ hợp như câu b).

63 Một kì thi có 15 câu hỏi khác nhau. Mỗi thí sinh chọn 4 câu hỏi trong 15 câu nói trên.

a) Có bao nhiêu cách chọn cho một thí sinh dự thi ?

b) Chứng tỏ rằng nếu có 2800 người dự thi thì ít nhất có 3 thí sinh có cách chọn giống nhau ?

Hướng dẫn

a) Số cách chọn của một thí sinh là : $C_{15}^4 = \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} = 1365$ cách.

b) Vì $1365 \times 2 = 2730 < 2800$ nên cứ hai người một cách chọn khác nhau thì đến người thứ 2731 cũng sẽ có một cách chọn trùng với hai người nào đó đã chọn cùng một cách chọn, nghĩa là ít nhất có 3 người có cùng một cách chọn.

64 Một tổ học sinh có 7 nam và 8 nữ. Cần lập nhóm công tác có 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhóm công tác trong mỗi trường hợp sau :

a) Nhóm gồm 5 người bất kì của tổ.

b) Nhóm có 3 nam và 2 nữ. **c)** Nhóm có ít nhất 2 nam.

Hướng dẫn

a) C_{15}^5 cách chọn. **b)** $C_7^3.C_8^2$ cách chọn.

c) $C_7^2.C_8^3 + C_7^3.C_8^2 + C_7^4.C_8^1 + C_7^5$.

65 Tính tổng : $S = \frac{C_n^1}{1} + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + \ldots + k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + \ldots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$.

Hướng dẫn

Theo câu a) bài 62 : $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1} \Rightarrow kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Mặt khác :

$$C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n}{n-k+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}$$

$$= \frac{n}{n-k+1}C_{n-1}^{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{nC_{n-1}^{k-1}}{\dfrac{n}{n-k+1}C_{n-1}^{k-1}} = n-k+1.$$

Cho k lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n, ta được :

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

66 Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt thành tích Cháu ngoan Bác Hồ, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn 3 học sinh trong số 50 học sinh trên đi dự liên hoan sao cho không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Hướng dẫn

Số cách chọn 3 em bất kì trong 50 em là : $C_{50}^3 = 19600$ cách.

Số cách chọn 3 em trong đó có một cặp sinh đôi là : $C_4^1.C_{48}^1 = 192$ cách.

Số cách chọn 3 em trong đó không có cặp sinh đôi nào là :

$$19600 - 192 = 19408 \text{ cách.}$$

67 Một chi đoàn thanh niên có 20 đoàn viên trong đó có 10 nữ. Lập một nhóm công tác có 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu tổ công tác cần ít nhất một nữ ?

Hướng dẫn

CÁCH THỨ NHẤT :

Số cách lập nhóm công tác 5 người, trong đó có đúng 1 nữ, 2 nữ, 3 nữ, 4 nữ, 5 nữ theo thứ tự là :

$$C_{10}^1.C_{10}^4,\ C_{10}^2.C_{10}^3,\ C_{10}^3.C_{10}^2,\ C_{10}^4.C_{10}^1,\ C_{10}^5.$$

Số cách chọn nhóm công tác có ít nhất một nữ là :

$$N = C_{10}^1.C_{10}^4 + C_{10}^2.C_{10}^3 + C_{10}^3.C_{10}^2 + C_{10}^4.C_{10}^1 + C_{10}^5 = 15252 \text{ cách.}$$

CÁCH THỨ HAI :

Số cách lập nhóm công tác 5 người bất kì là : $C_{20}^5 = 15504$ cách.

Số cách lập nhóm 5 người không có nữ nào : $C_{10}^5 = 252$ cách.

Số cách lập nhóm 5 người, trong đó có ít nhất một nữ là :

$$N = C_{20}^5 - C_{10}^5 = 15504 - 252 = 15252 \text{ cách.}$$

68 Chứng minh rằng trong khai triển nhị thức Niutơn $(a + b)^n$ thì :

a) Tổng tất cả các hệ số bằng 2^n.

b) Tổng tất cả các hệ số của các hạng tử có số thứ tự chẵn bằng tổng tất cả các hệ số của các hạng tử có thứ tự lẻ.

Hướng dẫn

a) Trong nhị thức Niutơn $(a + b)^n$, ta lấy a = b = 1 thì được :

$$(1 + 1)^n = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n .$$

b) Trong nhị thức Niutơn $(a + b)^n$, ta lấy a = 1, b = −1 thì được :

$$0 = (1 - 1)^n = C_0^1 1^n + C_n^1 1^{n-1}(-1) + C_n^2 1^{n-2}(-1)^2 + \ldots + C_n^n (-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$$

69 Viết đa thức $P(x) = (1 + x^2 - x^3)^9$ dưới dạng một tổng các hạng tử có lũy thừa tăng dần của x :

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$$

Hãy tìm hệ số của x^8 trong tổng trên.

Hướng dẫn

$$P(x) = (1 + x^2 - x^3)^9 = [1 + x^2(1 - x)]^9$$
$$= 1 + C_9^1x^2(1 - x) + C_9^2x^4(1 - x)^2 + C_9^3x^6(1 - x)^3 + C_9^4x^8(1 - x)^4 +$$
$$+ C_9^5x^{10}(1 - x)^5 + \ldots$$

Khi khai triển các hạng tử của vế phải đẳng thức trên thì các hạng tử chứa x^8 chỉ nằm trong khai triển của các hạng tử $C_9^3x^6(1 - x)^3$ và $C_9^4x^8(1 - x)^4$. Từ đây suy ra hệ số của hạng tử chứa x^8 là :

$$3C_9^3 + C_9^4 = 252 + 126 = 378.$$

70 Tìm hạng tử không chứa x trong biểu thức rút gọn của khai triển biểu thức : $P(x) = \left(1 + x + \dfrac{6}{x}\right)^{10}$.

Hướng dẫn

Đặt $u = x + \dfrac{6}{x}$ ta được :

$$P(x) = G(u) = (1 + u)^{10} = 1 + C_{10}^1u + C_{10}^2u^2 + C_{10}^3u^3 + \ldots + C_{10}^ku^k + \ldots \quad (1)$$

trong đó :

$$u^k = \left(x + \frac{6}{x}\right)^k = x^k + C_k^1 x^{k-2}.6 + C_k^2 x^{k-4}.6^2 + \ldots + C_k^r x^{k-2r}.6^r + \ldots \quad (2)$$

Ở vế phải của (2) hạng tử không chứa x là hạng tử chứa x^{k-2r} mà $k - 2r = 0$. Khi đó hạng tử này bằng $C_{2r}^r.6^r$.

Sau khi khai triển (1) và thu gọn các hạng tử đồng dạng ta được hạng tử không chứa x là :

$$1 + 6C_{10}^2.C_2^1 + 6^2 C_{10}^4.C_4^2 + 6^3 C_{10}^6.C_6^3 + 6^4 C_{10}^8 C_8^4 + 6^5 C_{10}^{10}.C_{10}^5$$

$$= 1 + 540 + 45360 + 907200 + 4082400 + 1959552 = 6995053.$$

71 Khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng từ biểu thức :

$P(x) = (1 + x)^9 = (1 + x)^{10} + \ldots + (1 + x)^{14}$, ta được

$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_{14}x^{14}$.

Hãy xác định hệ số A_9.

Hướng dẫn

$$A_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + C_{12}^9 + C_{13}^9 + C_{14}^9 = 3003.$$

72 Tính các hệ số của x^2 và của x^3 trong khai triển và thu gọn biểu thức

$$P(x) = (x + 1)^5 + (x - 2)^7.$$

Hướng dẫn

$$(x + 1)^5 = (1 + x)^5 = C_5^0.1^5 + C_5^1 x.1^4 + C_5^2 x^2 1^3 + \ldots$$

$$(x - 2)^7 = (-2 + x)^7 = C_7^0(-2)^7 + C_7^1(-2)^6 x + C_7^2(-2)^5 x^2 + \ldots$$

Suy ra hệ số của x^2 trong biểu thức thu gọn là $C_5^2 + C_7^2(-2)^5 = -662$.

Hệ số của x^3 là $C_5^3 + C_7^3(-2)^4 = 570$.

73 **a)** Viết khai triển nhị thức $(3x - 1)^{16}$, từ đó chứng minh rằng :

$$3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - 3^{13}C_{16}^3 + \ldots + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

b) Cho n nguyên dương. Chứng minh rằng :

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^n + \ldots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}.$$

Hướng dẫn

a) Trong khai triển $P(x) = (3x - 1)^{16}$, cho $x = 1$.

b) Viết công thức khai triển $P(x) = (1 - x)^{2n}$ rồi cho $x = 1$.

74 Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Hãy tìm số a của số hạng ax^{12} trong khai triển đó.

Hướng dẫn

Ta có : $(1 + x^2)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + \ldots + C_n^6 x^{12} + \ldots + C_n^n x^{2n}$

Cho x = 1, ta được :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

Do đó, ta có : $a = C_{10}^6 = 210$.

75 Với $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng : $C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2$.

Hướng dẫn

$$VT = \frac{(2n+k)(2n+k-1)\ldots(n+k+1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{(2n-k)(2n-k-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots n}$$

$$= \frac{\left[(2n)^2 - k^2\right]\left[(2n-1)^2 - k^2\right]\ldots\left[(n+1)^2 - k^2\right]}{(n!)^2}$$

$$\le \frac{(2n)^2(2n-1)^2\ldots(n+1)^2}{(n!)^2} = \left(C_{2n}^n\right)^2.$$

B. XÁC SUẤT

1. Phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu

Phép thử hay thí nghiệm ngẫu nhiên là thí nghiệm trong các điều cơ bản giống nhau nhưng kết quả mỗi lần thực hiện có thể khác nhau. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một thí nghiệm ngẫu nhiên gọi là ***không gian biến cố sơ cấp*** *hay* ***không gian mẫu*** *của thí nghiệm ngẫu nhiên đó.*

2. Biến cố ngẫu nhiên

Một sự kiện có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên T được mô tả bởi một tập hợp con A của không gian biến cố sơ cấp Ω của T gọi là ***biến cố ngẫu nhiên*** *A liên quan với T. Mỗi phần tử của Ω thuộc A được gọi là một kết quả của T* ***thuận lợi cho A****. Biến cố* ***không thể xảy ra*** *khi thực hiện T được mô tả bởi tập hợp rỗng ∅.* ***Biến cố luôn xảy ra*** *khi thực hiện T được gọi là* ***biến cố chắc chắn*** *được mô tả bằng toàn bộ không gian biến cố sơ cấp Ω của T.*

3. Định nghĩa cổ điển của xác suất

*Một phép thử ngẫu nhiên T có không gian biến cố sơ cấp gồm n kết quả đồng khả năng. Biến cố ngẫu nhiên A liên quan với T có n_A kết quả thuận lợi thì ta gọi tỉ số $\frac{n_A}{n}$ là **xác suất** của A, kí hiệu là*

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Các tính chất của xác suất

Từ định nghĩa của xác suất ta suy ra các tính chất sau đây :

a) *Xác suất của một biến cố ngẫu nhiên A bất kì là một số thực thuộc đoạn [0; 1] :* $0 \le P(A) \le 1$.

b) $P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1.$

c) *Hai biến cố A và B cùng liên quan với một phép thử ngẫu nhiên T **xung khắc** nhau thì biến cố ngẫu nhiên mô tả bằng $A \cup B$ có xác suất $P(A \cup B)$ thỏa mãn hệ thức :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hệ quả. *Biến cố A và $\overline{A}$ gọi là **đối lập** nhau nếu A và $\overline{A}$ xung khắc nhau và $A \cup \overline{A} = \Omega$. Khi đó thì $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.*

Nếu A, B là hai biến cố ngẫu nhiên bất kì và cùng liên quan với một phép thử ngẫu nhiên T thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

4. Xác suất có điều kiện

a) *Định nghĩa*

*Giả sử A là biến cố ngẫu nhiên có xác suất dương. Xác suất của biến cố B tính trong điều kiện A đã xảy ra được gọi là **xác suất của B với điều kiện A đã xảy ra**, kí hiệu là P(B/A), được tính theo công thức :*

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (1)$$

b) *Công thức nhân xác suất*

Từ công thức (1) ta suy ra :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) \qquad (2)$$

Với A, 3, C là ba biến cố bất kì sao cho $P(A \cap B) \neq 0$ thì (2) được mở rộng thành :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/A \cap B) \qquad (3)$$

*Các công thức (2) và (3) được gọi là các **công thức nhân xác suất**.*

c) Các biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Từ định nghĩa suy ra : Nếu $0 < P(A) < 1$*, A và B độc lập thì*

$$P(B/A) = P\left(B/\overline{A}\right) = P(B)$$

5. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n$ *với các xác suất tương ứng* $p_1 = P(X = x_1)$, $p_2 = P(X = x_2)$, ..., $p_n = P(X = x_n)$ *thỏa mãn*

$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ *trình bày dưới dạng bảng.*

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

được gọi là bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X.

6. Kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như ở trên mục 5. Ta gọi kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn X là các số được kí hiệu theo thứ tự E(X), D(X), $\sigma(X)$ *được xác định tương ứng như sau :*

a) Kì vọng :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_kp_k + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k$$

b) Phương sai :

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + ... + (x_k - E(X))^2 p_k + \\ + ... + (x_n - E(X))^2 p_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 p_k$$

c) Độ lệch chuẩn : $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

BÀI TẬP

76 Gieo ba lần liên tiếp một con súc sắc. Tính xác suất của biến cố tổng số chấm xuất hiện trong ba lần gieo không nhỏ hơn 16.

Hướng dẫn

Nếu gọi i, j, k, theo thứ tự là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất, thứ hai, thứ ba của một con súc sắc thì mỗi kết quả của thí nghiệm ngẫu nhiên gieo ba lần liên tiếp một con súc sắc được biểu thị bằng bộ ba chữ số nguyên dương (i, j, k) với $1 \le i, j, k \le 6$.

Không gian mẫu Ω gồm có : $6^3 = 216$ phần tử.

Biến cố A : tổng số chấm không nhỏ hơn 16 là tập hợp của các biến cố

A_1 : tổng số chấm bằng 16, gồm các kết quả thuận lợi sau :

(5; 5; 6), (5; 6; 5), (6; 5; 5), (6; 6; 4), (6; 4; 6), (4; 6; 6).

A_2 : tổng số chấm bằng 17, gồm các kết quả thuận lợi sau :

(6; 6; 5), (6; 5; 6), (5; 6; 6).

A_3 : tổng số chấm bằng 18 gồm kết quả : (6; 6; 6).

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

Các biến cố A_1, A_2, A_3 xung khắc nhau từng đôi. Do đó :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{6}{216} + \frac{3}{216} + \frac{1}{216} = \frac{5}{108} \approx 0,0463.$$

77 Có 8 quả cân có khối lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số các quả cân trên.

a) Có bao nhiêu kết quả có thể.

b) Tính xác suất của biến cố A, tổng khối lượng ba quả cân được chọn không vượt quá 9kg.

Hướng dẫn

a) Số kết quả có thể là : $N = C_8^3 = 56$.

b) Các kết quả thuận lợi với biến cố đang xét là :

(1; 2; 6), (1; 3; 5), (2; 3; 4), (1; 2; 3), (1; 2; 4), (1; 2; 5), (1; 3; 4).

$$P(A) = \frac{7}{56} = 0,125.$$

78 Một hộp đựng 10 viên bi có cùng kích thước và trọng lượng, trong đó có 6 viên bi màu xanh, 4 viên bi màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên một lúc 3 viên bi. Tính xác suất của biến cố :

a) Cả 3 viên bi đều là xanh.

b) Ít nhất có 1 viên bi màu xanh.

Hướng dẫn

a) Không gian mẫu có số phần tử là $C_{10}^3 = 120$.

Số kết quả thuận lợi biến cố cả ba viên bi xanh : $n_1 = C_6^3 = 20$.

Xác suất biến cố A lấy được ba viên bi xanh là : $P(A) = \frac{20}{120} \approx 0,167.$

b) Gọi B là biến cố ba viên bi có ít nhất 1 viên bi màu xanh, biến cố đối của B là $\overline{B}$ cả ba viên bi màu đỏ. Xác suất của B là :

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{29}{30} \approx 0{,}967.$$

79 Một tổ sinh viên có 6 nam, 5 nữ. Chọn ngẫu nhiên trong tổ 4 người.

a) Tính xác suất 4 người được chọn có 1 nữ.

b) Tính xác suất 4 người được chọn có không quá 3 nữ.

Hướng dẫn

a) Số phần tử không gian mẫu : $N = C_{11}^4$.

Gọi A là biến cố 4 người được chọn có 1 nữ.

Số kết quả thuận lợi cho A : $N_A = C_6^3.C_5^1$.

Xác suất $P(A) = \dfrac{C_6^3.C_5^1}{C_{11}^4} = \dfrac{10}{33} \approx 0{,}303.$

b) Gọi B là biến cố 4 người được chọn có không quá 3 nữ

$$P(B) = 1 - \frac{C_5^4}{C_{11}^4} = \frac{65}{66} \approx 0{,}985.$$

80 Một lớp học có 40 học sinh trong đó có 8 học sinh giỏi, 14 học sinh khá và 18 học sinh trung bình. Người ta chọn ngẫu nhiên một nhóm công tác có 3 người. Tính xác suất để nhóm :

a) Có ba học sinh đều giỏi.

b) Có ít nhất một học sinh giỏi.

c) Không có học sinh trung bình.

Hướng dẫn

a) $\dfrac{C_8^3}{C_{40}^3} \approx 0{,}006$ **b)** $1 - \dfrac{C_{32}^3}{C_{40}^3} \approx 0{,}498$ **c)** $\dfrac{C_{22}^3}{C_{40}^3} \approx 0{,}156.$

81 Có 9 tấm thẻ ghi các số từ 1 đến 9 (trên mỗi thẻ ghi một số, trên các thẻ khác nhau ghi các số khác nhau). Chọn ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để tích của hai số ghi trên hai thẻ đã chọn là một số chẵn.

Hướng dẫn

Trong các thẻ ghi số từ 1 đến 9 có bốn thẻ ghi số chẵn, năm thẻ ghi số lẻ. Tích hai số trên hai tấm thẻ được chọn là số chẵn xảy ra trong trường hợp hai tấm thẻ được chọn có ít nhất một thẻ ghi số chẵn.

Xác suất cần tìm là : $P(A) = 1 - \dfrac{C_5^2}{C_9^2} \approx 0{,}722.$

82 Gieo đồng thời hai con súc sắc đồng chất.

a) Tính xác suất của biến cố tổng số chấm trên hai con súc sắc bằng 8.

b) Tính xác suất của biến cố tổng số chấm trên hai con súc sắc là một số lẻ hoặc là một số chia hết cho 3.

Hướng dẫn

a) $P(A) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$.

b) Đặt B_1 là biến cố tổng số chấm trên hai con súc sắc là số lẻ, B_2 là biến cố tổng số chấm trên hai con súc sắc là một số chia hết cho 3.

Biến cố cần tìm là : $B = B_1 \cup B_2$.

Các kết quả thuận lợi cho $B_1 \cap B_2$ là (1; 2), (2; 1), (3; 6), (6; 3), (4; 5), (5; 4).

$$P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$
$$= \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

83 Một hộp đựng 12 viên bi có cùng kích thước và cùng khối lượng. Trong các viên bi có 7 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất :

a) Cả 3 viên đều màu đỏ.

b) Ba viên bi lấy ra có ít nhất hai viên màu đỏ.

c) Ba viên lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ.

Hướng dẫn

a) Gọi A là biến cố 3 viên bi lấy ra màu đỏ.

Số phần tử của không gian mẫu : $N = C_{12}^3 = 220$.

Số kết quả thuận lợi với A : $C_7^3 = 35$.

Xác suất của A : $P(A) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{35}{220} \approx 0{,}159$.

b) Gọi B là biến cố 3 viên bi lấy ra có ít nhất hai viên màu đỏ, B_2 là biến cố ba viên bi lấy ra có đúng 2 viên bi màu đỏ, A là biến cố ba viên bi lấy ra có 3 viên bi đỏ. Ta có : $B = B_2 \cup A$, trong đó B_2 và A xung khắc.

$$P(B) = P(B_2) + P(A) = \frac{C_7^2.C_5^1}{C_{12}^3} + \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{105 + 35}{220} \approx 0{,}636.$$

c) Gọi C là biến cố 3 viên bi lấy ra đều màu xanh. Biến cố đối của C là biến cố $\overline{C}$, trong ba viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ.

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = 1 - \frac{10}{220} \approx 0{,}955.$$

84 Một lô hàng có 10 sản phẩm cùng loại, trong đó có 7 sản phẩm loại một và 3 sản phẩm chất lượng loại hai.

a) Lấy ngẫu nhiên ra ba sản phẩm. Tính xác suất để lấy ra được 2 sản phẩm loại một và một sản phẩm loại hai.

b) Lấy ngẫu nhiên ra một sản phẩm rồi lại lấy ra một sản phẩm thứ hai. Tính xác suất để sản phẩm lấy lần thứ nhất là loại một và sản phẩm lấy ra lần hai là loại hai.

Hướng dẫn

a)

$$P(A) = \frac{C_7^2.C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{63}{120} = 0{,}525.$$

b) Gọi A là biến cố lấy được sản phẩm loại một lần thứ nhất, B là biến cố lần hai lấy sản phẩm loại hai, thì AB là biến cố lấy hai lần : lần thứ nhất lấy được sản phẩm loại một, lần thứ hai lấy được sản phẩm loại hai. Theo công thức nhân xác suất :

$$P(AB) = P(A).P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30} \approx 0{,}233.$$

85 Một lớp học có 45 học sinh trong đó có 25 nam, 20 nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh rồi chọn tiếp ngẫu nhiên một học sinh nữa. Tính xác suất của biến cố :

a) Hai người được chọn đều là nữ.

b) Hai người được chọn, có một nữ, một nam.

Hướng dẫn

a) Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là biến cố người được chọn lần thứ nhất, lần thứ hai là nữ, C là biến cố hai lần chọn đều đúng người được chọn là nữ.

Ta có : $$P(C) = P(A_1).P(A_2/A_1) = \frac{20}{45} \cdot \frac{19}{44} \approx 0{,}192.$$

b) Gọi B_1, B_2 theo thứ tự là biến cố người được chọn lần thứ nhất, lần thứ hai là nam, D là biến cố hai người được chọn có một nam, một nữ.

Khi đó : $D = A_1B_2 \cup B_1A_2$

Hai biến cố A_1B_2 và B_2A_1 là xung khắc nên ta có :

$$P(D) = P(A_1B_2) + P(B_2A_1)$$
$$= P(A_1).P(B_2/A_1) + P(B_1).P(A_2/B_1)$$
$$= \frac{20}{45}\cdot\frac{25}{44} + \frac{25}{45}\cdot\frac{20}{44} \approx 0,5051.$$

86 Hai xạ thủ cùng bắn vào một bia (một cách độc lập với nhau). Mỗi người bắn một viên đạn. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất là 0,85, của xạ thủ thứ hai là 0,75. Tính xác suất bia bị bắn trúng.

Hướng dẫn

Gọi A_1 là biến cố người thứ nhất bắn trúng bia, A_2 là biến cố người thứ hai bắn trúng bia, A là biến cố bia bị bắn trúng thì $A = A_1 \cup A_2$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Theo giả thiết, hai xạ thủ bắn vào bia là độc lập với nhau.

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$. Do đó :

$$P(A) = 0,85 + 0,75 - 0,85.0,75 = 0,9625.$$

87 Một hộp đựng 2 viên bi trắng, 3 viên bi đen. Lấy ngẫu nhiên một lần hai viên bi.

a) Tính xác suất biến cố lấy được một bi trắng, một bi đen.

b) Gọi X là số bi trắng trong hai viên bi được lấy. Hỏi X có phải là một biến ngẫu nhiên không ? Hãy lập bảng phân phối của biến ngẫu nhiên X.

Hướng dẫn

a) Không gian mẫu có số phần tử là $n = C_5^2 = 10$.

Gọi A là biến cố lấy được một bi trắng, một bi đen.

Số kết quả thuận lợi với A là $n_A = C_2^1.C_3^1$.

Xác suất của A là : $P(A) = \dfrac{n_A}{n} = \dfrac{C_2^1.C_3^1}{C_5^2} = 0,6$.

b) Đại lượng X nhận giá trị một cách ngẫu nhiên phụ thuộc vào kết quả của phép thử ngẫu nhiên nên X là biến ngẫu nhiên. Ở đây biến ngẫu nhiên X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2 với xác suất :

$$P(X = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \qquad P(X = 1) = \frac{C_2^1.C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}.$$

Bảng phân phối xác suất của X là :

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

88 Tung một đồng tiền (cân đối và đồng chất) ba lần. Gọi X là số lần xuất hiện mặt ngửa (mặt không có hình quốc huy) trong ba lần tung.

a) Hãy mô tả không gian mẫu.

b) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Hướng dẫn

a) Quy ước, nếu đồng tiền nảy mặt ngửa ta ghi N, nếu nảy mặt sấp (mặt có hình quốc huy) ta ghi S. Như vậy kí hiệu NSN nghĩa là tung ba lần đồng tiền, lần thứ nhất xuất hiện ngửa, lần thứ hai sấp, lần thứ ba ngửa. Không gian mẫu sẽ là :

$$\Omega = \{SSS, NSS, SNS, SSN, NNS, NSN, SNN, NNN\}$$

b) Nếu tung ba lần đồng tiền có kết quả là SSS. Khi đó X nhận giá trị bằng 0. Như vậy X có thể nhận các giá trị 0, 1, 2, 3.

$\{X = 0\}$ là một biến cố ngẫu nhiên có xác suất $P(X = 0) = \frac{1}{8}$.

Tương tự, ta có :

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

Bảng phân phối xác suất của X cho dưới đây :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

89 Gieo hai con súc sắc. Gọi X là tổng số chấm ở các mặt trên của hai con súc sắc. Lập bảng phân phối xác suất của X.

Hướng dẫn

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

90 Một hộp chứa 4 bi xanh, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từng viên bi cho đến khi xuất hiện bi đỏ thì dừng. Gọi X là số viên bi đã lấy cho tới lúc dừng.

a) Hãy lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

b) Tính kì vọng của X.

Hướng dẫn

a) Nếu ngay lần đầu lấy được bi đỏ thì X nhận giá trị bằng 1.

$$P(X = 1) = \frac{3}{7}.$$

Nếu lần thứ nhất lấy được bi xanh, lần thứ hai được bi đỏ thì kết quả được mô tả là XĐ, số bi đã lấy là X = 2.

$$P(X = 2) = P(XĐ) = P(X).P(Đ/X) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{2}{7}.$$

Tương tự, ta tính được :

$$P(X = 3) = P(XXĐ) = P(X).P(X/X).P(Đ/XX) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{35}, \ \ldots$$

Bảng phân phối của X như sau :

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

b) Theo bảng phân phối xác suất của X ta tính được kì vọng của X như sau :

$$E(X) = 1\cdot\frac{37}{7} + 2\cdot\frac{2}{7} + 3\cdot\frac{6}{35} + 4\cdot\frac{3}{35} + 5\cdot\frac{1}{35} = 13 \approx 1{,}86.$$

91 Cân nặng (kg) của 30 học sinh được chọn ngẫu nhiên từ khối lớp 6 một trường được ghi trong bảng sau :

39	39	38	41	42	40	41	39	40	43
38	40	37	41	40	41	41	42	43	39
40	41	42	39	37	42	36	40	38	41

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong 30 học sinh trên và kí hiệu X là khối lượng của học sinh đó.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Hướng dẫn

a) Từ bảng thống kê ta thấy X nhận các giá trị có thể là 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 với tần số tương ứng là 1, 2, 3, 5, 6, 7, 4, 2. Ta có bảng phân phối xác suất của X như sau :

X	36	37	38	39	40	41	42	43
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{40}$	$\frac{2}{30}$

b) + Kì vọng của X là :

$$E(X) = 36\cdot\frac{1}{30} + 37\cdot\frac{2}{30} + 38\cdot\frac{3}{30} + 39\cdot\frac{5}{30} + 40\cdot\frac{6}{30} + 41\cdot\frac{7}{30} + 42\cdot\frac{4}{30} + 43\cdot\frac{2}{30} = 40.$$

+ Phương sai của X là :

$$D(X) = (36-40)^2\cdot\frac{1}{30} + (37-40)^2\cdot\frac{2}{30} + (38-40)^2\cdot\frac{3}{30} + (39-40)^2\cdot\frac{5}{30} + (40-40)^2\cdot\frac{6}{30} + (41-40)^2\cdot\frac{7}{30} + (42-40)^2\cdot\frac{4}{30} + (43-40)^2\cdot\frac{2}{30} = \frac{92}{30} \approx 3{,}067.$$

+ Độ lệch chuẩn của X là :

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}067} \approx 1{,}751.$$

92 Một hộp đựng 10 quả bóng bàn cùng kích thước, trong đó có 6 quả màu vàng, 4 quả màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 quả bóng. Gọi X là số quả bóng màu trắng trong các quả bóng lấy ra.

a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

b) Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Hướng dẫn

a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

b) Kì vọng $E(X) = 1{,}2$

Phương sai $D(X) = 0{,}56$

Độ lệch chuẩn $\sigma(X) = \sqrt{0{,}56} \approx 0{,}748.$

Chương III

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp

Chứng minh một mệnh đề chứa biến là số tự nhiên A(n), n ∈ N bằng phương pháp quy nạp gồm các bước sau :

Bước cơ sở :

Chứng minh A(n) đúng với $n = n_0$ (thường $n_0 = 0$ hoặc $n_0 = 1$).

Bước quy nạp :

Giả sử A(n) đúng với $n = k \geq n_0$, lập luận để khẳng định A(n) đúng với $n = k + 1$.

BÀI TẬP

Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh các mệnh đề dưới đây :

93 Chứng minh với mọi n nguyên dương ta có :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \qquad (1)$$

Hướng dẫn

- Với n = 1 ta có : $\frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}$, nghĩa là (1) đúng với n = 1.
- Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là ta có đẳng thức

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k} \qquad (*)$$

ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1. Thật vậy, với n = k + 1 vế trái (1) là :

$$VT = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{k}{2^k}\right) + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

Theo giả thiết quy nạp, thay biểu thức ( ) bởi (*) ta được

$$VT = 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

Chứng tỏ (1) đúng với n = k + 1. Vậy (1) đúng với mọi n ∈ N*.

94 Chứng minh :

a) $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ chia hết cho 3 với mọi $n \in N$.

b) $2^n > n^2$ với mọi $n \geq 5$, $n \in N$.

Hướng dẫn

a) $A(n) = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$.

- Với $n = 0$, $A(0) = 3$ chia hết cho 3.
- Giả sử $A(k) = k^3 + 3k^2 + 5k + 3$ chia hết cho 3.

Ta có : $A(k + 1) = (k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 5(k + 1) + 3$

$= (k^3 + 3k^2 + 5k + 3) + 3(k^2 + 3k + 3)$ chia hết cho 3.

Vậy mệnh đề đã nêu là đúng.

b) Với $n = 5$ ta có : $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Mệnh đề đúng với $n = 5$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k > 5$, nghĩa là ta có : $2^k > k^2$.

Khi đó $2^{k+1} = 2.2^k > 2k^2$.

Xét hiệu $2k^2 - (k + 1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k - 1)^2 - 2 > 0$ với $k > 5$.

Chứng tỏ : $2^{k+1} > 2k^2 > (k + 1)^2$, mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \in N$, $n \geq 5$.

95 Chứng minh :

a) $A(n) = 4.3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 64 với mọi $n \in N$.

b) $B(n) = 16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in N^*$.

Hướng dẫn

a) $A(0) = 4.3^2 + 32.0 - 36 = 0$ chia hết cho 64.

Giả sử $A(k) = 4.3^{2k+2} + 32k - 36$ chia hết cho 64.

Khi đó $A(k + 1) = 4.3^{2k+4} + 32(k + 1) - 36 = 4.3^2(3^{2k+2}) + 32k + 32 - 36$

$= (4.3^{2k+2} + 32k - 36) + 4.8.3^{2k+2} + 32$

$= A(k) + 32(3^{2k+2} + 1)$

trong đó $A(k) \vdots 64$; $32(3^{2k+2} + 1) \vdots 64$ ($\vdots$ là kí hiệu chia hết, 3^{2k+2} là số lẻ, $3^{2k+2} + 1$ là số chẵn, chia hết cho 2).

Vậy $A(k + 1) \vdots 64$.

b) Với $n = 1$, $B(1) = 16 - 15 - 1 = 0 \vdots 225$.

Giả sử $B(k) = 16^k - 15k = 1$ chia hết cho 225.

$B(k + 1) = 16^{k+1} - 15(k + 1) - 1 = 16.16^k - 15k - 16$

$= B(k) + 15.16^k - 15 = B(k) + 15(16^k - 1)$.

Với $k > 1$, $16^k - 1 = (16 - 1)(16^{k-1} + 16^{k-2} + \dots + 1) \vdots 15$.

Do đó $15(16^k - 1) \vdots 225$; $B(k) \vdots 225$, nên $B(k + 1) \vdots 225$.

Mệnh đề đúng với mọi $n \in N^*$.

96 Chứng minh :

a) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n + 2n + 1 = n + 1, \quad \forall n \in N^*$

b) $B(n) = (n + 1)(n + 2)\dots(2n)$ chia hết cho $C(n) = 1.3.5\dots(2n - 1)$ với mọi $n \in N^*$.

Hướng dẫn

a) Bạn tự giải.

b) Với $n = 1$, ta có $B(1) = 2$, $C(1) = 1$ mà $2 \vdots 1$. Vậy mệnh đề đúng với $n = 1$.

Giả sử $B(k) \vdots C(k)$, nghĩa là $(k + 1)(k + 2)\dots(2k) \vdots 1.3.5\dots(2k - 1)$.

$$\begin{aligned} B(k + 1) &= (k + 2)(k + 3)\dots(2k)(2k + 1)[2(k + 1)] \\ &= 2(k + 1)(k + 2)\dots(2k).(2k + 1) = (2k + 1)B(k) \end{aligned}$$

Ta có : $C(k + 1) = (2k + 1)C(k)$, mà $B(k) \vdots C(k)$,

suy ra $B(k + 1) \vdots C(k + 1)$.

Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \in N^*$.

97 Chứng minh với mọi $n \in N^*$: $\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt{}} < 3$.

Hướng dẫn

Với $n = 1$, ta có : $\sqrt{6} < 3$ (vì $(\sqrt{6})^2 = 6 < 3^2$).

Giả sử với $n = k$, ta có $\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}_{k \text{ dấu } \sqrt{}} < 3$

Khi đó $6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}_{k \text{ dấu } \sqrt{}} < 6 + 3$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}_{(k+1) \text{ dấu } \sqrt{}} < \sqrt{6 + 3} = 3.$$

Mệnh đề đúng với mọi $n \in N^*$.

98 Chứng minh : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2} \quad \forall n \in N^*$.

Hướng dẫn

Với n = 1, ta có : $1 > \frac{1}{2}$. Mệnh đề đúng với n = 1.

Giả sử với n = k : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2}$.

Khi đó với n = k + 1, vế trái bất đẳng thức trở thành :

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}\right) + \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}}_{2^k \text{ số hạng}}$$

$$> \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^{k+1} - 1} > \frac{k}{2} + \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}.$$

Vậy mệnh đề đúng với mọi n.

99 Chứng minh với mọi n nguyên dương ta có :

a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ **b)** $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

d) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

Hướng dẫn

a, b) Bạn tự giải.

c) Với n = 1, mệnh đề đúng. Giả sử mệnh đề đúng với n = k. Khi đó

$$(1^3 + 2^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Mệnh đúng với n = k + 1.

d) Mệnh đề đúng với n = 1.

Giả sử với n = k

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 3}{3} = \frac{(k+1)[4(k+1)^2 - 1]}{3}.$$

Mệnh đề đúng với n = k + 1. Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \in N^*$.

$\boxed{100}$ Chứng minh :

a) Với $a > -1$ thì với mọi $n \in N$ ta có :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{(Bất đẳng thức Becnuli).}$$

b) $3^n > 2^n + 7n \quad \forall n \in N^*, n > 3.$

c) $\underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \ldots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ dấu } \sqrt[3]{\ }} < 2$ với mọi $n \in N^*$.

d) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24} \quad \forall n \in N, n \geq 2.$

e) Với mọi n nguyên dương, $n \geq 4$, số đường chéo của đa giác lồi n cạnh là $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

f) Tổng các góc (trong) của đa giác lồi n cạnh bằng $2(n - 2)$ vuông.

Hướng dẫn

Bạn đọc tự giải.

§2. Dãy số

1. Định nghĩa

Hàm số u(n) xác định trên tập hợp N^* các số nguyên dương gọi là ***dãy số vô hạn****. Tập hợp các giá trị của u(n) là :*

$u_1 = u(1)$, $u_2 = u(2)$, ..., $u_n = u(n)$ ... được gọi là các số hạng của dãy số.

Số hạng $u_1 = u(1)$ là ***số hạng đầu****, $u_n = u(n)$ là* ***số hạng tổng quát*** *của dãy số.*

Hàm số u(n) xác định ***trên đoạn đầu*** *các số nguyên dương*

$M = \{1; 2; \ldots; m\}$ được gọi là ***dãy số hữu hạn****.*

Giá trị của hàm số u(n) tại số $k \in M$ là $u_k = u(k)$ gọi là ***số hạng thứ k*** *của dãy số, $u_1 = u(1)$ là* ***số hạng đầu****, $u_m = u(m)$ là* ***số hạng cuối****.*

2. Cách cho dãy số

+ *Cho bằng công thức của số hạng tổng quát.*

Ví dụ dãy $\{u_n\}$ với $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

+ *Cho bằng công thức truy hồi. Ví dụ $u_1 = u_2 = 1$, $u_{k+1} = u_{k-1} + u_k$ với $k \geq 2$.*

+ *Cho dưới dạng khai triển $u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$*

3. *Dãy số $\{u_n\}$ là* ***dãy số tăng*** *nếu $u_{k+1} > u_k \quad \forall k \in N^*$*

Dãy số $\{u_n\}$ là ***dãy số giảm*** *nếu $u_{k+1} < u_k \quad \forall k \in N^*$.*

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) ***bị chặn trên*** *nếu tồn tại số $M \in R$ mà $u_k \le M$, $\forall k \in N^*$,* ***bị chặn dưới*** *nếu có số $m \in R$ sao cho $u_k \ge m$, $\forall k \in N^*$.*

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** *nếu nó bị chặn trên và bị chặn dưới.*

BÀI TẬP

101 Hãy viết 5 số hạng đầu tiên của mỗi dãy số được cho bởi công thức của số hạng tổng quát dưới đây :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$ **b)** $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}$.

Hướng dẫn

a) $u_1 = \dfrac{2.1}{1^2 + 1} = 1$; $u_2 = \dfrac{2.2}{2^2 + 1} = \dfrac{4}{5}$; $u_3 = \dfrac{2.3}{3^2 + 1} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$;

$u_4 = \dfrac{2.4}{4^2 + 1} = \dfrac{8}{17}$; $u_5 = \dfrac{2.5}{5^2 + 1} = \dfrac{10}{26}$.

Vậy dãy 5 số hạng đầu của dãy là 1; $\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{3}{5}$; $\dfrac{8}{17}$; $\dfrac{5}{13}$.

b) $u_1 = \dfrac{\sin\left(1.\dfrac{\pi}{2}\right)}{1} = 1$; $u_2 = \dfrac{\sin\left(2.\dfrac{\pi}{2}\right)}{2} = 0$; $u_3 = \dfrac{\sin\left(3.\dfrac{\pi}{2}\right)}{3} = -\dfrac{1}{3}$;

$u_4 = \dfrac{\sin\left(4.\dfrac{\pi}{2}\right)}{4} = 0$; $u_5 = \dfrac{\sin\left(5.\dfrac{\pi}{2}\right)}{5} = \dfrac{1}{5}$.

Năm số hạng đầu của dãy là 1; 0; $-\dfrac{1}{3}$; 0; $\dfrac{1}{5}$.

102 Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát của mỗi dãy được cho dưới dạng khai triển dưới đây :

a) 3,2; 3,02; 3,002; 3,0002; 3,00002; ...

b) 1; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{1}{16}$; ...

Hướng dẫn

a) $u_1 = 3{,}2 = 3 + 0{,}2 = 3 + \dfrac{2}{10^1}$;

$u_2 = 3,02 = 3 + \frac{2}{100} = 3 + \frac{2}{10^2}$;

$u_3 = 3,002 = 3 + \frac{2}{1000} = 3 + \frac{2}{10^3}$;

$u_4 = 3,0002 = 3 + \frac{2}{10^4}$; $u_5 = 3,00002 = 3 + \frac{2}{10^5}$.

Số hạng tổng quát của dãy $u_n = 3 + \frac{2}{10^n}$.

b) $u_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{2^{1-1}}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2-1}}$;

$u_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{3-1}}$; $u_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{4-1}}$;

$u_5 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^{5-1}}$.

Số hạng tổng quát của dãy : $u_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

103 Dãy số (u_n) được cho bằng hệ thức truy hồi sau đây :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

Hãy xác định dãy số trên bằng cách viết công thức của số hạng tổng quát của nó.

Hướng dẫn

Cho n lần lượt bằng 1, 2, 3, ... ta được :

$$u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{3}{2}; \quad u_3 = \frac{u_2}{2}; \quad u_4 = \frac{1}{2}u_3, \ldots$$

Suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2}$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{2}$; ...

$$u_n = \left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)\left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\right)\ldots\left(\frac{u_4}{u_3}\right)\left(\frac{u_3}{u_2}\right)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)u_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u_1$$

$$u_n = \frac{1}{2^{n-1}}u_1 = \frac{3}{2^{n-1}}$$

Vậy ta có thể viết dãy đã cho là : $\left\{\frac{3}{2^{n-1}}\right\}$.

104 Cho dãy số (u_n) xác định bởi hệ thức truy hồi :

$$u_1 = \sqrt{2}\ ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \forall n \in N^*$$

Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n theo n.

Hướng dẫn

Ta có $u_1 = \sqrt{2} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$;

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^2}} = \sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^3}} = 2\cos\frac{\pi}{2^3}$$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (*)

- Rõ ràng (*) đúng với n = 1.
- Giả sử (*) đúng với n = k, nghĩa là ta có : $u_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$. Khi đó

$u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$, nghĩa là (*) cũng đúng với n = k + 1. Vậy (*) đúng với mọi $n \in N^*$.

105 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\forall n \in N^*$.

Dãy số (v_n) xác định bởi công thức truy hồi : $v_1 = u_1 = 1$; $v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$.

Hãy xác định (v_n) bằng công thức của số hạng tổng quát.

Hướng dẫn

Ta có $v_1 = 1$

$v_2 = v_1 + u_2$

$v_3 = v_2 + u_3$

. . . .

$v_n = v_{n-1} + u_n$

$$\Rightarrow \quad v_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Vậy dãy số (v_n) có số hạng tổng quát $v_n = \frac{n}{n+1}$.

106 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Hãy xác định các số hạng u_{50}, u_{n+2}, u_{2n+1}.

Hướng dẫn

$$u_{50} = \frac{99}{152}; \qquad u_{n+2} = \frac{2(n+2)-1}{3(n+2)+2} = \frac{2n+3}{3n+8};$$

$$u_{2n+1} = \frac{2(2n+1)-1}{3(2n+1)+2} = \frac{4n+1}{6n+5}.$$

107 **a)** Viết số hạng tổng quát của dãy số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó chia cho 7 đều có số dư là 3.

b) Viết số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được cho dưới dạng công thức truy hồi : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{3}u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) $u_n = 7(n-1) + 3$, $n \in \mathbb{N}^*$. **b)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

108 Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) dưới đây.

a) $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ **b)** $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Hướng dẫn

a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow$ $u_{n+1} > u_n \ \forall n$. Dãy số tăng.

b) Ta thấy $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét tỉ số :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}.n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)^n}$$

$$= \frac{(n+2)^{n+1}n^{n+1}(n+1)}{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}.n} = \frac{[n(n+2)]^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{(n^2+2n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Vì $-\frac{1}{(n+1)^2} > -1\ \forall n \in N^*$. Theo bất đẳng thức Becnouli ta có :

$$\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1-\frac{(n+1)}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1}$$

Do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n\ \forall n \in N^*$.

Vậy dãy số tăng.

109 Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) cho dưới đây :

a) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ **b)** $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Hướng dẫn

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} < 0\ \forall n \in N$. Dãy số giảm.

b) $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(-\frac{1}{2}-1\right) = (-1)^{n+1}.\frac{3}{2^{n+1}}$ (*)

Biểu thức (*) cho thấy, nếu n lẻ thì $u_{n+1} - u_n > 0$ hay $u_{n+1} > u_n$; nếu n chẵn thì $u_{n+1} < u_n$.

Như vậy dãy không giảm cũng không tăng.

Ghi chú : Dãy số tăng hay dãy số giảm gọi chung là *dãy số đơn điệu*. Dãy số lúc tăng, lúc giảm là dãy số không đơn điệu.

110 Cho dãy số $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$, $n \in N^*$ và dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức

$$x_n = u_1.u_2 \ldots u_n$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) tăng và dãy số (x_n) giảm.

Hướng dẫn

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} > 0\ \forall\ n$.

b) $u_n > 0\ \forall n \in N^*$, suy ra $x_n > 0\ \forall n \in N^*$

Lập tỉ số $\frac{x_{n+1}}{x_n} = u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} < 1$. Suy ra dãy (x_n) giảm.

111 Xét tính đơn điệu của mỗi dãy số cho dưới đây :

a) $u_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ **b)** $u_n = 2 - \sqrt{n+2}$.

Hướng dẫn

a) Xét $u_{n+1} - u_n$. Dãy số tăng. **b)** Dãy số giảm.

112 Cho dãy số $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+1}$, $n \in N^*$. Chứng tỏ rằng (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên.

Hướng dẫn

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(3n+1)(3n+4)} > 0 \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ tăng.}$$

Lại có $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+1} < \dfrac{2n}{3n+1} < \dfrac{2n}{3n} = \dfrac{2}{3} \quad \forall n.$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên.

113 Cho dãy số (u_n) xác định bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \quad n \in N^* \end{cases}$

Chứng minh dãy số trên giảm và bị chặn dưới.

Hướng dẫn

Ta có : $u_2 = \dfrac{u_1 + 1}{2} = \dfrac{2+1}{2} < 2 = u_1$.

Giả sử $u_k > u_{k+1}$ khi đó : $u_{k+2} = \dfrac{u_{k+1} + 1}{2} < \dfrac{u_k + 1}{2} = u_{k+1}$

Theo nguyên lí quy nạp : $u_{n+1} < u_n \ \forall n \in N^*$. Dãy số (u_n) giảm..

Mặt khác, ta có $u_1 = 2 > 0$. Giả sử $u_k > 0$ thì $u_{k+1} = \dfrac{u_k + 1}{2} > 0$. Theo nguyên lí quy nạp $u_n > 0 \ \forall n$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới.

114 Xét tính bị chặn của mỗi dãy số (u_n) được cho dưới đây :

a) $u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ **b)** $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Hướng dẫn

a) $u_n > 0 \ \forall n$. Vậy (u_n) bị chặn dưới.

$u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)} < 1 \ \forall n$. Vậy (u_n) bị chặn trên.

Dãy (u_n) bị chặn dưới và bị chặn trên, do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Rõ ràng $u_n = \dfrac{2^n}{n} > 0 \ \forall n$. Dãy (u_n) bị chặn dưới.

Mặt khác $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} > 1 \ \forall n > 1$.

Và không có số thực $M > 0$ nào để $u_n \le M \ \forall n$. Dãy số (u_n) không bị chặn trên.

115 Xét tính bị chặn của mỗi dãy số (u_n) cho dưới đây :

a) $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$ **b)** $u_n = \frac{n^2+2}{n}$

c) $u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{1+u_n} \quad \forall n. \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Bị chặn dưới, bị chặn trên, do đó bị chặn.

b) $u_n > 0 \ \forall n \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

Cho K là số dương lớn tùy ý, ta chọn số tự nhiên $n > K$.

Khi đó $u_n = n + \frac{2}{n} > n > K$, suy ra (u_n) không bị chặn trên.

c) Bị chặn.

d) Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta được $1 \le u_n \le \frac{3}{2} \ \forall n \in N$.

Dãy (u_n) bị chặn.

116 Xét tính đơn điệu và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) dưới đây :

a) $u_n = (-1)^n + \sin n\frac{\pi}{4}$ **b)** $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$

c) $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \quad \forall n \in N^* \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Hãy chứng minh (u_n) không đơn điệu và $-3 < u_n < 3$.

b) Dãy tăng. Hãy chứng minh $0 < u_n < 1 \ \forall n$.

c) Dãy tăng, $0 < u_n < 2$ (Dùng quy nạp).

§3. Cấp số cộng và cấp số nhân

1. Cấp số cộng

Định nghĩa : *Một dãy số hữu hạn hoặc vô hạn (u_n) được gọi là **cấp số cộng** nếu $u_{n+1} = u_n + d$ $\forall n$, trong đó d là một hằng số gọi là **công sai** của cấp số. Người ta còn kí hiệu cấp số cộng (u_n) là $\div\, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$*

Tính chất : *Cho (u_n) là một cấp số cộng với công sai d thì :*

- $u_k = \dfrac{1}{2}[u_{k-1} + u_{k+1}],\ k \geq 2$
- $u_n = u_1 + (n-1)d$
- $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$

2. Cấp số nhân

Định nghĩa : *Dãy số (u_n) hữu hạn hoặc vô hạn được gọi là **cấp số nhân với công bội q** nếu*

$$u_{n+1} = u_n q \quad \forall n,$$

trong đó q là một hằng số. Người ta còn kí hiệu cấp số nhân là

$$\div\div\, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Tính chất : *Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ thì*

- $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \quad \forall k \geq 2$
- $u_n = u_1 q^{n-1}$
- $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$

BÀI TẬP

117 Một cấp số cộng (u_n) có số hạng thứ ba bằng -15, số hạng thứ 14 bằng 18. Tìm số hạng thứ 10 của cấp số đó.

Hướng dẫn

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo đề ra ta có :

$$u_3 = u_1 + 2d = -15; \qquad u_{14} = u_1 + 13d$$

$$\Rightarrow \quad u_{14} - u_3 = 18 + 15 = 13d - 2d \quad \Rightarrow \quad d = 3$$

$$u_{10} = u_{14} - 4d = 18 - 12 = 6.$$

118 Trong các cấp số cộng dưới đây, hãy xác định số hạng cho tương ứng :

a) $\div\, 2;\ 5;\ 8;\ \ldots$ xác định u_{17}.

b) $\div\, 2 + \sqrt{3}\ ;\ 4;\ 6 - \sqrt{3}\ ;\ \ldots$ xác định u_{20}.

Hướng dẫn

a) $u_1 = 2,\quad d = u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$

$$u_{17} = u_1 + 16d = 2 + 16.3 = 50.$$

b) $d = u_2 - u_1 = 4 - (2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$.

$$u_{20} = u_1 + 19d = 2 + \sqrt{3} + 19(2 - \sqrt{3}) = 40 - 18\sqrt{3}.$$

119 Cho cấp số cộng $\div\, a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots$

Các số hạng của nó thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = 10 \\ a_4 + a_6 = 26 \end{cases}$

Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

Hướng dẫn

Ta có : $\begin{cases} a_2 + a_5 - a_3 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = a_1 + 3d = 10 \\ a_4 + a_6 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 5d) = 2a_1 + 8d = 26. \end{cases}$

Từ hệ phương trình trên ta tìm được số hạng đầu của cấp số $a_1 = 1$, công sai $d = 3$.

120 Cho cấp số cộng có số hạng đầu là 5, số hạng cuối là 45. Tổng tất cả các số hạng của nó là 400. Tìm công sai và số các số hạng của cấp số đó.

Hướng dẫn

Ta có : $\div\, a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n$

Với $a_1 = 5,\ a_n = 45$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(5 + 45)}{2} = 400$$

Suy ra số số hạng của cấp số là $n = \dfrac{400 \times 2}{50} = 16.$

Cộng sai d của cấp số thỏa : $a_n = a_{16} = a_1 + 15d = 5 + 15d = 45$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}.$$

121 Xen vào giữa các số 7 và 22 bốn số thực sao cho ta có một cấp số cộng nhận 7 là số hạng đầu và 22 là số hạng cuối.

Hướng dẫn

Giả sử ta có $\div$ 7; x; y; z; t; 22.

Số hạng của cấp số là $n = 6$ với $u_1 = 7$, $u_6 = 22 = 7 + 5d$

$$\Rightarrow \quad d = (22 - 7) : 5 = 3.$$

Suy ra $x = 10$, $y = 13$, $z = 16$, $t = 19$.

122 Một cấp số cộng có 5 số hạng. Biết tổng của tất cả các số hạng của cấp số bằng 100, tổng của ba số hạng cuối gấp bảy lần tổng của hai số hạng đầu. Hãy xác định cấp số đó.

Hướng dẫn

$$\div \frac{5}{3};\ \frac{65}{6};\ 20;\ \frac{175}{6};\ \frac{115}{3}.$$

123 Biết rằng dãy số thực dương a_1; a_2; ...; a_n là một cấp số cộng. Chứng minh hệ thức :

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} \qquad (1)$$

Hướng dẫn

Ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d},$$

trong đó d là công sai của cấp số.

Tương tự, ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d}$$

Vế trái của (1) trở thành :

$$\frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + \ldots + (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}})}{d} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d}$$

$$= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{(a_1 + (n-1)d) - a_1}{d(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \text{ (ĐPCM).}$$

124 Hãy xác định số x sao cho các số $a = 10 - 3x$, $b = 2x^2 + 3$, $c = 7 - 4x$ lập thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn

Ta biết rằng để ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần và đủ là a + c = 2b, nghĩa là :

$$(10 - 3x) + (7 - 4x) = 2(2x^2 + 3) \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{11}{4}.$$

125 Cho 3 số dương a, b, c. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy số a^2, b^2, c^2 lập thành một cấp số cộng với công sai dương là dãy số $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ là một cấp số cộng.

Hướng dẫn

Dãy số $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ là cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \Leftrightarrow \frac{b-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{c-b}{(a+b)(c+a)}$$

$\Leftrightarrow$ $(b - a)(b + a) = (c - b)(b + c) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = c^2 - b^2$

$\Leftrightarrow$ $a^2; b^2; c^2$ lập thành một cấp số cộng.

126 Tìm các nghiệm của phương trình : $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$ (1)

Biết rằng các nghiệm này lập thành một cấp số cộng a – d; a; a + d với $d \neq 0$.

Hướng dẫn

Ta có : $(a - d)^3 - 15(a - d)^2 + 71(a - d) - 105 = 0$

$a^3 - 15a^2 + 71a - 105 = 0$

$(a + d)^3 - 15(a + d)^2 + 71(a + d) - 105 = 0.$

Suy ra : $6ad^2 - 30d^2 = d^2(6a - 30) = 0$.

Vì $d \neq 0$ ta có : $6a - 30 = 0 \Rightarrow a = 5$.

Vì a = 5 là một nghiệm nên vế trái của (1) chia hết cho (x – a). Do đó :

(1) $\Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 10x + 21) = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 5; x = 7$.

127 Cho hai cấp số cộng : ÷ $u_1, u_2, ..., u_n$ ... với công sai d_1.

÷ $v_1, v_2, ..., v_n$ ... với công sai d_2.

Gọi tổng của n số hạng đầu của mỗi cấp số theo thứ tự là

$$S_1 = u_1 + u_2 + ... + u_n = 7n + 1,$$

$$T_1 = v_1 + v_2 + ... + v_n = 4n + 27$$

Tìm tỉ số $\frac{u_{11}}{v_{11}}$ của các số thứ 11 của hai cấp số đó.

Hướng dẫn

Ta có : $S_n = 2u_1 + (n-1)d_1$; $T_n = 2v_1 + (n-1)d_2$

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{2u_1 + (n-1)d_1}{2v_1 + (n-1)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27} \qquad (1)$$

$$\frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{u_1 + 10d_1}{v_1 + 10d_2} = \frac{2u_1 + 20d_1}{2v_1 + 20d_2} \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2), ta thấy (2) suy ra từ (1) với $n = 21$. Do đó ta tìm được $\frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{148}{111} = \frac{4}{3}$.

128 Cho hàm số $y = f(x) = ax + b$, trong đó a, b là các hằng số với $a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu (u_n) là một cấp số cộng thì $(f(u_n))$ cũng là một cấp số cộng.

Hướng dẫn

Điều kiện để (u_n) là cấp số cộng là với $k \geq 2$:

$$u_k = \frac{1}{2}(u_{k-1} + u_{k+1})$$

Dựa vào công thức của f(x), hãy chứng minh :

$$f(u_k) = \frac{1}{2}f(u_{k-1}) + \frac{1}{2}f(u_{k+1}).$$

129 Cho cấp số cộng ÷ 1; 4; 7; ...; x; ... Hãy xác định số hạng x của cấp số, biết rằng : $1 + 4 + 7 + ... + x = 92$.

Hướng dẫn

Dễ thấy công sai của cấp số $d = 3$, $x = 1 + 3(n-1)$, với n là số thứ tự của số hạng x.

$$S_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + [1 + 3(n-1)] = \frac{n}{2}[1 + 1 + 3(n-1)] = 92$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n^2 - n - 184 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 8, \quad x = 1 + 3(8-1) = 22.$$

130 Một vật rơi tự do (sức cản không khí coi là không đáng kể) sau giây đầu tiên đi được 4,9m. Trong mỗi giây sau vật đi được quãng đường dài hơn 9,8m so với quãng đường đi được trong giây liền trước đó. Hỏi cần bao nhiêu thời gian để vật rơi tự do cao 4410m tới mặt đất.

Hướng dẫn

Gọi u_n là quãng đường vật đi được trong giây thứ n thì dãy số (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4{,}9$m; công sai $d = 9{,}8$. Gọi n là số giây để vật đi được 4410m. Khi đó :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 4410$$

Đáp số : 30 giây.

$\boxed{131}$ Cho (u_n) là một cấp số cộng. Trong các dãy số cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

a) $2u_1, 2u_2, 2u_3, \ldots, 2u_n, \ldots$ **b)** $u_1, u_3, u_5, \ldots, u_{2n-1}, \ldots$

c) $u_1 + 2, u_2 + 2, u_3 + 2, \ldots, u_n + 2, \ldots$

d) $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \ldots; \frac{1}{u_n}; \ldots$ với $u_n \neq 0\ \forall n \in N^*$.

Hướng dẫn

a), b), c) cấp số cộng.

d) Nếu $u_1 = u_2 = \ldots = u_n \neq 0$, dãy số trên là cấp số cộng. Trái với các điều kiện trên thì dãy đã cho không phải là cấp số cộng.

$\boxed{132}$ Xác định cấp số nhân (u_n) thỏa mãn các hệ thức : $\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_3 + u_4 = 36. \end{cases}$

Hướng dẫn

$$u_1 + u_6 = u_1 + u_1q^5 = u_1(1 + q)^5 = 244$$

$$u_3 + u_4 = u_1q^2 + u_1q^3 = u_1(q^2 + q^3) = 36$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + q^5}{q^2(1 + q)} = \frac{244}{36} = \frac{61}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - q + q^2 - q^3 + q^4}{q^2} = \frac{61}{9}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 + \frac{1}{q^2} + 1 - \left(\frac{1}{q} + q\right) = \frac{61}{9}$$

Đặt $q + \frac{1}{q} = t$ với $|t| \geq 2$, ta được $\frac{1}{q^2} + q^2 = t^2 - 2$ và có phương trình :

$$t^2 - t - \frac{70}{9} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{10}{3},\ t_2 = -\frac{7}{3}.$$

Với $q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3}$ suy ra $q = 3$ hoặc $q = \frac{1}{3}$.

Nếu công bội $q = \frac{1}{3}$, số hạng đầu $u_1 = \dfrac{244}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^5} = 243$, ta có cấp số nhân : ÷÷ 243; 81; 27; ...

Với $q + \frac{1}{q} = -\frac{7}{3}$ suy ra $q = \frac{\sqrt{13} - 7}{6}$ hoặc $q = \frac{-\sqrt{13} - 7}{6}$.

Nếu $q = \frac{\sqrt{13} - 7}{6}$ thì số hạng đầu $u_1 = \frac{36}{q^2(1 + q)} = \frac{324(\sqrt{13} + 1)}{31 - 7\sqrt{13}}$.

Nếu $q = \frac{-\sqrt{13} - 7}{6}$ thì số hạng đầu $u_1 = \frac{324(1 - \sqrt{13})}{31 + 7\sqrt{13}}$.

133 Hãy chen vào giữa các số 160 và 10 ba số thực sao cho ta có một cấp số nhân với 5 số hạng với số hạng đầu là 160, số hạng thứ 5 là 10.

Hướng dẫn

Ta có ÷÷ $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5$ với $u_1 = 160$, $u_5 = 10$

$$u_5 = 10 = u_1q^4 = 160 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra các số cần tìm là : 80, 40, 20.

134 Cho cấp số nhân ÷÷ $\frac{2}{3}; -1; \frac{3}{2}; ...$

Hãy tìm tổng của 6 số hạng đầu của cấp số đó.

Hướng dẫn

Công bội q của cấp số nhân là : $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$.

Tổng của 6 số hạng đầu của cấp số là :

$$S_6 = u_1 + u_2 + ... + u_6 = \frac{u_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{133}{48}.$$

135 Ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Áp dụng. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, biết tổng của chúng bằng 21, tổng các bình phương của chúng bằng 189.

Hướng dẫn

Theo tính chất của cấp số nhân thì ÷÷ a; b; c $\Leftrightarrow$ $b^2 = ac$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + ac = (a + c)^2 - b^2$$

$$= (a + b + c)(a - b + c) \quad \text{Đpcm.}$$

Áp dụng. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 189$, $a + b + c = 21$.

Suy ra $\begin{cases} a + b + c = 21 \\ a - b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a + c = 15 \\ b = 6 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \quad a + c = 15$$

$$a.c = b^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 3,\ c = 12$$

Ba số hạng của cấp số nhân là : 3, 6, 12.

136 Tìm một cấp số nhân có 6 số hạng. Biết tổng của ba số hạng đầu bằng 21, tổng của ba số hạng sau bằng 168.

Hướng dẫn

$\div\div\, u_1;\ u_2;\ u_3;\ \ldots;\ u_6$

$$u_1 + u_2 + u_3 = u_1(1 + q + q^2) = 21$$

$$u_4 + u_5 + u_6 = u_4(1 + q + q^2) = 168 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_4}{u_1} = \frac{168}{21} = 8$$

$$\Rightarrow \quad 8u_1 = u_4 = u_1.q^3 \quad \Rightarrow \quad q^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad q = 2$$

$$u_1 = \frac{21}{1 + q + q^2} = \frac{21}{7} = 3.$$

Cấp số nhân cần tìm : 3; 6; 12; 24; 48; 96.

137 Một cấp số nhân hữu hạn có tổng bằng 728, số hạng cuối là 486, công bội q = 3. Tìm số hạng đầu của cấp số.

Hướng dẫn

$$S_n = \frac{u_1 - u_1q^n}{1 - q} \quad \Rightarrow \quad 728.(1 - 3) + qu_n = u_1 = 3 \times 486 - 2 \times 728 = 2.$$

138 Tìm hai số thực x, y, biết rằng $5x - y$; $2x + 3y$; $x + 2y$ là một cấp số cộng và $(y + 1)^2$; $xy + 1$; $(x - 1)^2$ là một cấp số nhân.

Hướng dẫn

$$\begin{cases} (5x - y) + (x + 2y) = 2(2x + 3y) \\ (xy + 1)^2 = (y + 1)^2(x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ (x - y)(2xy - 2) + x^2 + y^2 - 6xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{3}{10} \end{cases}.$$

139 Cho ba số $\frac{2}{b-a}$; $\frac{1}{b}$; $\frac{2}{b-c}$ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng a; b; c lập thành một cấp số nhân.

Hướng dẫn

Từ điều kiện của dãy số là cấp số cộng :

$$\frac{2}{b-a} + \frac{2}{b-c} = \frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad b(b-c) + b(b-a) = (b-a)(b-c)$$

$$\Rightarrow \quad 2b^2 - bc - ba = b^2 - ab - bc + ac$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = ac \quad \Rightarrow \quad \text{a; b; c là cấp số nhân.}$$

140 Cho tam giác ABC có các cạnh tương ứng a, b, c. Biết $\hat{A} = 90^0$, a; $\sqrt{\frac{2}{3}}b$; c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm số đo các góc B và C.

Hướng dẫn

Từ tính chất của cấp số nhân ta có : $ac = \frac{2}{3}b^2$ (1)

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông b = asinB, c = acosB suy ra

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2\sin^2B = 3a^2\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2B + 3\cos B - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{B} = 60^0,\ \hat{C} = 30^0.$$

141 Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8 + u_n}{5} \end{cases} \quad \forall n \in N^* .$$

Dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - 2$ $\forall n \in N^*$. Chứng minh (v_n) là một cấp số nhân. Xác định công thức của số hạng tổng quát của (u_n) và (v_n).

Hướng dẫn

Ta có : $v_1 = 1 - 2 = -1$, $v_{n+1} = \frac{8 + u_n}{5} - 2 = \frac{u_n - 2}{5} = \frac{1}{5}v_n$

$\Rightarrow$ (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = -1$, công bội $q = \frac{1}{5}$.

Công thức số hạng tổng quát của các dãy số :

$$v_n = -\frac{1}{5^{n-1}}; \qquad u_n = 2 + v_n = 2 - \frac{1}{5^{n-1}}.$$

Chương IV

GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

§ 1. Dãy số có giới hạn

1. Dãy số có giới hạn 0

Dãy số (u_n) có giới hạn là 0, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$), nếu tất cả các số hạng của dãy kể từ một số hạng nào đó trở đi đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương tùy ý cho trước.

Ví dụ : $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, *với* $|q| < 1$: $\lim q^n = 0$.

Định lí. *Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).*

Nếu $|u_n| \le v_n \ \forall n$ *và* $\lim v_n = 0$ *thì* $\lim u_n = 0$.

2. Dãy số có giới hạn

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ (hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$ khi $n \to +\infty$) nếu $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - L) = 0$.

3. Các định lí về dãy số có giới hạn hữu hạn

Định lí 1.

- $\lim u_n = L \Rightarrow \lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$
- $u_n \ge 0 \ \forall n$, $\lim u_n = L$ thì $L \ge 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 2. *Nếu* $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ *và c là hằng số thì :*

- $\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$, $\lim(u_n.v_n) = L.M$, $\lim cu_n = cL$.
- *Nếu* $M \ne 0$ *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$.

Định lí 3. *(Định lí kẹp về giới hạn của dãy số)*

Cho ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n) và số thực L.

Nếu $u_n \le v_n \le w_n \ \forall n$ *và* $\lim u_n = \lim w_n = L$ *thì* $\lim v_n = L$.

Định lí 4.

a) Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.

b) Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

*+ $u_1, u_1q, \ldots, u_1q^{n-1}, \ldots$ với công bội q mà $|q| < 1$ gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.*

Ta có : $S = \lim S_n = \lim(u_1 + u_1q + \ldots + u_1q^{n-1}) = \dfrac{u_1}{1-q}$

*S gọi là **tổng của cấp số nhân** đã cho. Khi đó ta viết :*

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

BÀI TẬP

142 Chứng minh mỗi dãy số có số hạng tổng quát cho dưới đây có giới hạn bằng 0.

a) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ **b)** $u_n = \dfrac{3}{4n-1}$.

Hướng dẫn

a) *CÁCH 1.* Dùng định nghĩa.

Cho một số dương ε khá nhỏ, chẳng hạn $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$. Xét bất đẳng thức :

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000} \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 > 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n > 999.$$

Như vậy dãy số $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ kể từ số hạng thứ 1000 trở đi đều nhỏ hơn $\dfrac{1}{1000}$. Một cách tổng quát, lấy số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý ta có

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Điều này nghĩa là kể từ số hạng thứ n_0 (bằng phần nguyên của số $\dfrac{1}{\varepsilon}$) trở đi mọi số hạng của dãy $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ đều nhỏ hơn số dương ε nhỏ tùy ý cho trước. Theo định nghĩa $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0.$

CÁCH 2. Dùng định lí : Nếu $|u_n| \le v_n \ \forall n \ \lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Ta có : $\left|\dfrac{1}{n+1}\right| < \dfrac{1}{n}$ và $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Do đó $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

b) Tương tự câu a).

CÁCH 1. $\dfrac{3}{4n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n - 1 > \dfrac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$

Lấy $n_0 = \left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]$ (kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số x).

Mọi số hạng của dãy kể từ chỉ số $n > n_0$ đều nhỏ hơn số $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý cho trước. Vậy $\lim \dfrac{3}{4n-1} = 0$.

CÁCH 2.

Với $n > 1$, $u_n = \left|\dfrac{3}{4n-1}\right| < \dfrac{3}{3n} = \dfrac{1}{n}$, $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, do đó $\lim \dfrac{3}{4n-1} = 0$.

143 Chứng minh mỗi dãy số có số hạng tổng quát cho dưới đây có giới hạn bằng 0.

a) $u_n = \dfrac{1 + \cos 2n}{n+2}$ **b)** $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\dfrac{n}{2} + 1}$.

Hướng dẫn

a) $|1 + \cos 2n| \le 2 \Rightarrow |u_n| \le \dfrac{2}{n+2}$, $\lim \dfrac{2}{n+2} = 0$

Vì vậy $\lim \dfrac{1 + \cos 2n}{n+2} = 0$.

b) $|u_n| = \dfrac{2\sqrt{n+1}}{n+2} = -\dfrac{2(n+1)}{(n+2)\sqrt{n+1}} \le \dfrac{2}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 0$.

144 Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với :

a) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ **b)** $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+2}$.

Hướng dẫn

a) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4} \quad \forall n > 1$.

Với $n = 2$ $\quad \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{3}{2^3} : \dfrac{2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

Giả sử với n = k ta có $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \le \dfrac{3}{4}$.

Xét n = k + 1, tỉ số $\dfrac{u_{k+2}}{u_{k+1}} = \dfrac{k+2}{2^{k+2}} \cdot \dfrac{2^{k+1}}{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)}$.

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_k . u_{k+2} - u_{k+1}}{u_k . u_{k+1}} = \frac{-1}{2^{2(k+1)} . u_k u_{k+1}} < 0$$

(vì $u_n > 0$ $\forall n$) suy ra $\dfrac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \le \dfrac{u_{k+1}}{u_k} \le \dfrac{3}{4}$.

Vậy với mọi $n \in N^*$, $n > 1$ ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$.

Từ kết quả trên ta có : $|u_n| = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} . \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \ldots \dfrac{u_3}{u_2} \cdot \dfrac{u_2}{u_1} \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

Vì $\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3} = 0$, do đó $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{2^n} = 0$.

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+2} = \dfrac{(n+1) - n}{(n+2)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n}$

$|u_n| < \dfrac{1}{n}$, $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, do đó $\lim u_n = 0$.

145 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$ **b)** $u_n = (0,95)^n$.

Hướng dẫn

a) $|u_n| = \dfrac{2n}{n^2+1} = \dfrac{2}{n + \dfrac{1}{n}} < \dfrac{2}{n}$ $\Rightarrow$ $\lim u_n = 0$.

b) $u_n = (0,95)^n = 0,95.(0,95)^{n-1} \to 0$ khi $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

146 Dùng định nghĩa chứng minh :

a) $\lim \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2$ **b)** $\lim \dfrac{2n - 3}{5n + 4} = \dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn

a) $\lim\left(\dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2\right) = \lim\left(\dfrac{-3}{n^2 + 1}\right)$. Do $\left|\dfrac{-3}{n^2+1}\right| < \dfrac{3}{n^2} \to 0$ khi $n \to 0$.

Vậy $\lim\left(\frac{2n^2-1}{2}-2\right)=0$. Theo định nghĩa, $\lim\frac{2n^2-1}{n^2+1}=2$.

b) Làm tương tự câu a).

147 Dùng các định lí về giới hạn tìm giới hạn của mỗi dãy số :

a) $u_n=\frac{2n-1}{3n+2}$ **b)** $u_n=\frac{3n+5}{2n^2-3n+1}$

c) $u_n=\frac{n^3+2n}{n^4-n^2+2}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim\frac{2n-1}{3n+2}=\lim\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{\lim 2-\lim\frac{1}{n}}{\lim 3+\lim\frac{2}{n}}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

b) $$\lim\frac{3n+5}{2n^2-3n+1}=\lim\frac{\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\left(\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{2}=0.$$

c) Làm tương tự câu b), $\lim u_n=0$.

148 Tìm giới hạn các dãy số (u_n) với :

a) $u_n=1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}$ **b)** $u_n=\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2}$.

Hướng dẫn

a) Nhân với lượng liên hợp ta được :

$$\lim u_n=\lim\frac{[1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}][1+n^2+\sqrt{n^4+3n+1}]}{1+n^2+\sqrt{n^4+3n+1}}$$

$$=\lim\frac{(1+n^2)^2-(n^4+3n+1)}{1+n^2+\sqrt{n^4+3n+1}}=\lim\frac{2n^2-3n}{1+n^2+\sqrt{n^4+3n+1}}$$

$$=\lim\frac{2-\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}+1+\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{2}{2}=1.$$

b) $$\lim u_n = \lim \frac{\left[n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}\right]\left[(n^2)^2 - n^2\sqrt[3]{1-n^6} + \sqrt[3]{(1-n^6)^2}\right]\left[\sqrt{n^4+1} + n^2\right]}{\left[\sqrt{n^4+1} - n^2\right]\left[\sqrt{n^4+1} + n^2\right]\left[(n^2)^2 - n^2\sqrt[3]{1-n^6} + \sqrt[3]{(1-n^6)^2}\right]}$$

$$= \lim \frac{\left[(n^2)^3 + (1-n^6)\right]\left[\sqrt{n^4+1} + n^2\right]}{\left[n^4 + 1 - (n^2)^2\right]\left[n^4 - n^2\sqrt[3]{1-n^6} + \sqrt[3]{(1-n^6)^2}\right]}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^8}} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6} - 1} + \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n^6} - 1\right)^2}} = 0.$$

149 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$ với $|a| < 1$, $|b| < 1$.

b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Hướng dẫn

a) $$u_n = \frac{(1 - a^{n+1}) : (1 - a)}{(1 - b^{n+1}) : (1 - b)} = \frac{(1 - a^{n+1})(1 - b)}{(1 - b^{n+1})(1 - a)}$$

$$\lim u_n = \frac{\lim(1 - a^{n+1})\lim(1 - b)}{\lim(1 - b^{n+1})\lim(1 - a)} = \frac{1 - b}{1 - a}$$

(vì $|a| < 1$, $|b| < 1$, $\lim a^{n+1} = \lim b^{n+1} = 0$).

b) $$u_n = \frac{(2^2 - 1)(3^2 - 1)\ldots(n^2 - 1)}{2^2.3^2\ldots n^2} = \frac{1.3.2.4.3.5\ldots(n-1)(n+1)}{(1.2.3\ldots n)^2}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(n-1).3.4.5\ldots(n+1)}{(1.2.3\ldots n)^2} = \frac{n+1}{2.n}$$

$$\lim u_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) Với mọi $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ thì $0 < n^2 + 1 \le n^2 + k \le n^2 + n$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} \le \sqrt{n^2+k} \le \sqrt{n^2+n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Suy ra $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \quad \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

Theo định lí kẹp về giới hạn dãy số ta có $\lim u_n = 1$.

150 Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = \dfrac{3.4^n + 5^{n+1}}{2.3^n + 5^n}$ **b)** $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

c) $u_n = \dfrac{2.1^2 + 3.2^2 + \ldots + (n+1)n^2}{n^4}$

d) $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

Hướng dẫn

a) $u_n = \dfrac{3\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5}{2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}$; $\lim u_n = 5$.

b) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$; $\lim u_n = 1$.

c) $u_n = \dfrac{1^2 + 1^3 + 2^2 + 2^3 + \ldots + n^2 + n^3}{n^4} = \dfrac{(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)}{n^4}$

$\lim u_n = \dfrac{1}{4}$.

d) $\dfrac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \dfrac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k - k^2(k+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Đáp số : 1.

151 Chứng minh mỗi dãy số (u_n) cho dưới đây có giới hạn hữu hạn :

a) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$ **b)** $u_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Hướng dẫn

a) Xét hiệu :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n+1} + \frac{1}{n+n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

Vậy dãy (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác $0 < u_n < \frac{n}{n+1} < 1\ \forall n$. Dãy số (u_n) tăng và bị chặn, do đó có giới hạn.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0\ \forall n$. Vậy (u_n) tăng. Mặt khác :

$$u_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Dãy (u_n) bị chặn trên. Vậy dãy (u_n) có giới hạn.

152 Chứng minh mỗi dãy số (u_n) dưới đây có giới hạn. Hãy tìm giới hạn của mỗi dãy số đó.

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$

Hướng dẫn

a) $u_n > 0\ \forall n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2+u_n} < \frac{1}{2}$. Dãy (u_n) giảm, bị chặn dưới bởi 0. Vậy (u_n) có giới hạn. Giả sử $\lim u_n = a$, ta có :

$$\lim u_{n+1} = \lim u_n \quad \Leftrightarrow \quad a = \lim u_{n+1} = \frac{\lim u_n}{\lim(2 + u_n)} = \frac{a}{2+a}$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2a = a \quad \Rightarrow \quad a = 0 \text{ (loại } a = -1 \text{ vì } u_n > 0\ \forall n).$$

Vậy $\lim u_n = 0$.

b) Bằng quy nạp ta chứng minh (u_n) tăng và bị chặn. Ta có

$$u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_1.$$

Giả sử $u_k > u_{k-1}$, suy ra $2 + u_k > 2 + u_{k-1}$

$$\Rightarrow \quad u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k} > \sqrt{2 + u_{k-1}} = u_k.$$

Vậy (u_n) tăng.

Mặt khác $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Giả sử $u_k < 2 \Rightarrow u_k + 2 < 2 + 2$

$\Rightarrow u_{k+1} = \sqrt{u_k + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Vậy $u_n < 2\ \forall n$. Dãy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn. Giả sử $\lim u_n = a$, ta có :

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + \lim u_n} = \sqrt{2 + a}$$

$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ (loại $a = -1$ vì $u_n > 0\ \forall n$).

Vậy $\lim u_n = 2$.

153 Tính tổng các cấp số nhân lùi vô hạn :

a) $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots$ **b)** $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

Hướng dẫn

a) $S = \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$ **b)** $S = \dfrac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

154 Viết dạng khai triển của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) trong mỗi trường hợp sau :

a) công bội $q = -\frac{1}{3}$, tổng $S = 9$.

b) tổng $S = 16$, số hạng thứ hai $u_2 = 4$.

Hướng dẫn

a) $\div\div\ u_1;\ u_1q;\ u_1q^2;\ \dots$

$S = \dfrac{u_1}{1 - q}$. Thay $q = -\frac{1}{3}$, $S = 9$, ta được :

$$9 = \frac{u_1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \Rightarrow u_1 = 12$$

Cấp số nhân có dạng khai triển là $\div\div\ 12; -4; \frac{4}{3}; -\frac{4}{9}; \frac{4}{27}; \dots$

b) Ta có : $u_1 = u_1.q$, $S = \dfrac{u_1}{1 - q} = \dfrac{u_2}{q(1 - q)}$

Thay $S = 16$, $u_2 = 4$, ta được :

$$16 = \frac{4}{q(1 - q)} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad u_1 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Cấp số nhân có dạng khai triển là : $\div\div\ 8; 4; 2; 1; \dots$

155 Xác định dạng phân số của mỗi số thập phân vô hạn tuần hoàn sau :

a) $1,383838... = 1,(38)$ **b)** $17,2354141 41... = 17,235(41)$.

Hướng dẫn

a) $$1,383838... = 1 + \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + ... = 1 + \frac{\frac{38}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + \frac{38}{99} = \frac{137}{99}$$

Vậy $1,(38) = \dfrac{137}{99}$.

b) $$17,235(41) = \frac{17235}{1000} + \frac{41}{100000} + \frac{41}{1000.100^2} + \frac{41}{1000.100^3} + ...$$

$$= \frac{17235}{1000} + \frac{41}{100000\left(1 - \frac{1}{100}\right)} = \frac{17235}{1000} + \frac{41}{99000} = \frac{1706306}{99000}.$$

§2. Dãy số dần đến vô cực

1. Định nghĩa

Nếu kể từ số n_0 nào đó mọi số hạng u_n của dãy số (u_n), đều lớn hơn một số dương lớn tùy ý cho trước ta nói dãy số (u_n) có ***giới hạn*** $+\infty$*, kí hiệu* $\lim u_n = +\infty$.

Dãy số (u_n) có ***giới hạn*** $-\infty$*, kí hiệu* $\lim u_n = -\infty$*, nếu kể từ số n_0 nào đó mọi u_n, đều nhỏ hơn một số âm tùy ý cho trước.*

2. Một vài dãy số có giới hạn $+\infty$

$\lim \sqrt{n} = +\infty$, $\lim n^k = +\infty$, *k nguyên dương,* $\lim q^n = +\infty$ *với* $q > 1$.

3. Một số định lí về dãy số dần đến vô cực

Định lí 1.

a) *Nếu* $\lim u_n = a$, $\lim v_n = \pm\infty$ *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

b) *Nếu* $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$, $v_n > 0$ *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) *Nếu* $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = a > 0$ *thì* $\lim u_n v_n = \pm\infty$.

Định lí 2.

a) *Nếu* $\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = +\infty$ *thì* $\lim u_n v_n = +\infty$.

b) *Nếu* $\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = -\infty$ *hoặc* $\lim u_n = -\infty$, $\lim v_n = +\infty$ *thì* $\lim u_n v_n = -\infty$.

c) *Nếu* $\lim u_n = -\infty$, $\lim v_n = -\infty$ *thì* $\lim u_n v_n = +\infty$.

BÀI TẬP

156 Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát sau :

a) $u_n = 3n^2 - 4n + 10$ **b)** $u_n = \sqrt[3]{4n^3 - 3n + 5}$.

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} n^2\left(3 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{10}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} n^2 . \lim\limits_{n \to \infty}\left(3 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{10}{n^2}\right) = +\infty \times 3 = +\infty.$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} n\sqrt[3]{4 - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}} = \lim\limits_{n \to \infty} n . \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[3]{4 - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}} = +\infty . \sqrt[3]{4} = +\infty.$

157 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với :

a) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^3 - n + 1}}{2n + 3}$ **b)** $u_n = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 3}}$.

Hướng dẫn

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{n}{2n + 3} . \lim \sqrt{n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \lim \dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{n}} . \lim \sqrt{n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{1}{2} \times \infty = \infty.$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 - n + 3} . \lim n . \lim \sqrt{2 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^2}} = +\infty.$

158 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với :

a) $u_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 4}{2n^3 - n + 1}$ **b)** $u_n = \dfrac{3n^3 + n^2 - 4}{4n^2 + n + 2}$

c) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n} - 1}{2n^2 + 3}$ **d)** $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + n} + 3\sqrt{n^2 - n + 1}}{n\sqrt{2} + 3}$

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2\left(5 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\lim\left(5 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\left(2n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{5}{+\infty} = 0 .$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{n^2\left(3n + 1 - \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \dfrac{\lim\left(3n + 1 - \dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\left(4 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \dfrac{+\infty}{4} = +\infty .$

c) $\lim u_n = \lim \dfrac{n\sqrt{n}\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n\sqrt{n}\left(2\sqrt{n} + \dfrac{3}{n\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{\lim\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\lim\left(2\sqrt{n} + \dfrac{3}{n\sqrt{n}}\right)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

d) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + n} + 3\sqrt{n^2 - n + 1}}{n\sqrt{2} + 3} = \lim \dfrac{n\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} + 3n\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}}{n\left(\sqrt{2} + \dfrac{3}{n}\right)}$

$$= \frac{\lim\sqrt[3]{1 + \dfrac{1}{n^2}} + \lim 3\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}}{\lim\left(\sqrt{2} + \dfrac{3}{n}\right)} = \frac{1 + 3}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2}.$$

159 Tìm giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát sau đây khi $n \to +\infty$

a) $u_n = n\left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}\right)$ **b)** $u_n = \sqrt{3n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1}$.

Hướng dẫn

a) $u_n = \dfrac{n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 2}} = \dfrac{n[(n^2 + 1) - (n^2 - 2)]}{n\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{n}}\right)}$

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \dfrac{3}{2}.$

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{[(3n^2 + 2) - (n^2 - 1)]}{\sqrt{3n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim \dfrac{n\left(n + \dfrac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3 + \dfrac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}\right)} = +\infty$

160 Tìm giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát sau đây :

a) $u_n = \dfrac{3^{2n} + 1}{3 + 5.2^{3n}}$ **b)** $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3 - n^2 + 3}}{(3n - 1)(4n + 3)}$.

Hướng dẫn

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{1 + \dfrac{1}{3^{2n}}}{\dfrac{1}{3^{2n-1}} + 5\left(\dfrac{8}{9}\right)^n} = +\infty$ **b)** $\lim u_n = 0.$

161 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1}}$ **b)** $u_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$.

Hướng dẫn

a) $\lim u_n = \lim \dfrac{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}}{3} = +\infty$. **b)** $\lim u_n = \lim \dfrac{-n^2}{n + \sqrt{n^2+1}} = -\infty$.

162 Tìm các giới hạn của các dãy số (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{3n^2 + 5n + 4}{2n + n^2}$ **b)** $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{5n^3 + n + 1}$.

Hướng dẫn

a) $\lim u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{2}{n} + 1} = 3$. **b)** $\lim u_n = \lim \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(5n^3 + n + 1)} = \dfrac{1}{15}$.

163 Tìm giới hạn của dãy số (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{5^n - 3n}{2.7^n + 4^n}$ **b)** $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Hướng dẫn

a) $u_n = \dfrac{1 - 3.\dfrac{n}{5^n}}{2.\left(\dfrac{7}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n}$

$$\lim u_n = \frac{\lim\left(1 - 3.\dfrac{n}{5^n}\right)}{\lim 2\left(\dfrac{7}{5}\right)^n + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n} = \frac{1 - 3\lim\dfrac{n}{5^n}}{2\lim\left(\dfrac{7}{5}\right)^n + \lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}$$

Theo kết quả bài 144 : $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$, $\dfrac{n}{5^n} < \dfrac{n}{2^n}$ $\forall n$, suy ra $\lim \dfrac{n}{5^n} = 0$.

Lại có $\dfrac{7}{5} > 1$, $\lim\left(\dfrac{7}{5}\right)^n = +\infty$, $\dfrac{4}{5} < 1$, $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$.

Suy ra $\lim u_n = \dfrac{1}{+\infty} = 0$.

b) $u_n > \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n^2}$

$\lim \sqrt[3]{n^2} = +\infty$, do đó $\lim u_n = +\infty$.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ - HÀM SỐ LIÊN TỤC

§3. Giới hạn của hàm số

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

Cho $x_0 \in (a; b)$, hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; b)$ (có thể không xác định tại x_0). Nếu mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a; b)$ $\forall n$, $x_n \neq x_0$; $\lim x_n = x_0$ ta luôn có $\lim f(x_n) = L$ (hoặc $\lim f(x_n) = \pm\infty$) thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn L (hoặc giới hạn vô cực) khi x dần tới x_0, khi đó ta kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

(hay $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$).

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ và mọi dãy số (x_n) với $x_n \in (a; +\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ (hay $\lim f(x_n) = \infty$) thì ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn L (hay vô cực) khi x dần đến ∞. Khi đó ta viết :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \text{(hay } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty\text{)}.$$

3. Một số định lí về giới hạn của hàm số

Định lí 1. *Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ thì :*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$

c) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Định lí 2. *Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó :*

a) $\lim |f(x)| = |L|$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

c) Nếu $f(x) \geq 0$ với $x \neq x_0$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Định lí 3. *Ba hàm số $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in (a; b)\setminus\{x_0\}$ và*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \quad \text{thì} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

BÀI TẬP

164 Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2}(8x^2 - 5x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x + 4}$.

Hướng dẫn

a) Hàm số $f(x) = 8x^2 - 5x + 1$ xác định với mọi $x \in R$. Xét dãy số (x_n) bất kì có $\lim x_n = 2$, ta xét dãy số $(f(x_n))$.

Ta có : $\lim f(x_n) = \lim(8x_n^2 - 5x_n + 1)$

$$= 8\lim x_n^2 - 5\lim x_n + 1 = 8.4 - 5.2 + 1 = 23$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 23$.

b) Với mọi dãy số (x_n) với $x_n \neq -2$ và $\lim x_n = -2$ ta có :

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2 + x_n - 6}{2x_n + 4} = \frac{(2x_n - 3)(x_n + 2)}{2(x_n + 2)} = \frac{2x_n - 3}{2}$$

$$\lim_{x_n \to -2} f(x_n) = \lim_{x_n \to -2} \frac{2x_n - 3}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x_n \to -2}(2x_n - 3) = -\frac{7}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + x - 6}{2x + 4} = -\dfrac{7}{2}$.

165 Dùng các định lí về giới hạn của hàm số tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + x - 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 1}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3}\sqrt{2x^2 - 9}$.

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 1 = 9 + 3 - 1 = 11$.

b) $$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{-x^2 + 4x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 3x + 1)}{\lim\limits_{x \to 1}(-x^2 + 4x + 1)}$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 3\lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 1}{-\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 4\lim\limits_{x \to 1} x + \lim\limits_{x \to 1} 1} = \frac{2 + 3 + 1}{-1 + 4 + 1} = \frac{3}{2}$$

c) Ta có : $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 - 9) = 2\lim\limits_{x \to 3} x^2 - \lim\limits_{x \to 3} 9 = 18 - 9 = 9$.

$$\lim_{x \to 3}\sqrt{2x^2 - 9} = \sqrt{\lim_{x \to 3}(2x^2 - 9)} = \sqrt{9} = 3.$$

166 Tìm giới hạn của hàm số :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x + 10}}{x^2 + 2x + 15}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - x - 6}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x + 10}}{x^2 + 2x + 15} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x + 10}}{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 2x + 15)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 3}(2x + 10)}}{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 + 2x + 15)} = \frac{\sqrt{16}}{30} = \frac{2}{15}.$$

b) Với $x \neq 2$, ta luôn có :

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - x - 6} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(2x + 3)} = \frac{x + 5}{2x + 3}.$$

Do đó : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - x - 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 5}{2x + 3} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x + 5)}{\lim\limits_{x \to 2}(2x + 3)} = \dfrac{7}{7} = 1.$

167 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 9}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{4x}{\sqrt{9 + x} - 3}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x + 2}$.

Hướng dẫn

a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $4(\sqrt{15} + 3)$ d) 0.

168 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x + 1)^2}{2x^2 - 4}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x + 1)^2}{2x^2 - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(2 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(2 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 5x + 6) - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-5 + \dfrac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-5 + \dfrac{6}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2}} + 1\right)} = \frac{-5}{2}.$$

169 Tìm giới hạn của hàm số :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 4}{\sqrt{x^2 - 3}}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 + \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 3.$$

b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2 - 3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(3 - \dfrac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \dfrac{4}{x}}{-\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^2}}} = -3.$$

Ghi chú : Kí hiệu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ để chỉ giới hạn của hàm số f(x) khi $x \to -\infty$ và $x \to +\infty$ có cùng giá trị, nghĩa là :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

170 Tìm giới hạn của hàm số :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 3}}{2x^2 - x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|2x^3 - 9x|}{3x - 2}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 - x + 3}}{\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 - x + 1)}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x + 3) = 9$, $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 - x + 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - x + 3)} = \sqrt{9} = 3$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{3}{16}$.

b) Vì $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2x^3 - 9x|}{3x - 2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}|2x^3 - 9x|}{\lim\limits_{x\to 2}(3x - 2)}$

$\lim\limits_{x\to 2}(2x^3 - 9x) = -2$, $\quad \lim\limits_{x\to 2}|2x^3 - 9x| = |\lim\limits_{x\to 2}(2x^3 - 9x)| = |-2| = 2$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

§4. Giới hạn một bên

Định nghĩa 1.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Nếu mọi dãy số (x_n) mà $x_n \in (x_0; b)$ $\forall n$ và $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$ thì ta nói $f(x)$ có ***giới hạn bên phải*** *khi x dần tới x_0 là L và viết*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \text{ (hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+\text{)}$$

Tương tự, khi $f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$, $x_n \in (a; x_0)$ $\lim x_n = x_0$ đều có $\lim f(x_n) = L$ thì $f(x)$ có ***giới hạn bên trái*** *khi x dần tới x_0 là L và kí hiệu*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \text{ (hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-\text{)}$$

§5. Một số quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L \neq 0$

thì dấu của $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$ *cho trong bảng :*

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	*Dấu của L*	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2. *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ *và* $g(x) \neq 0$ *với mọi*

$x \neq x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cho trong bảng sau :

Dấu của L	*Dấu của g(x)*	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	−	$-\infty$
−	+	$-\infty$
−	−	$+\infty$

BÀI TẬP

171 Cho hàm số : $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$. Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

Hướng dẫn

Ta có : $\lim\limits_{x \to 3} (2x+5) = 11$, $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to 3^+} (x-3) = 0^+$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{11}{0^+} = +\infty.$$

172 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x+3}{\sqrt{x-5}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\sqrt{x} - x^2}{3x\sqrt{3x} + 2x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{2|x-1|}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{2|x-1|}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x \to 5^+} \frac{x+3}{\sqrt{x-5}} = \frac{\lim\limits_{x \to 5^+} (x+3)}{\lim\limits_{x \to 5^+} \sqrt{x-5}} = \frac{8}{+0} = +\infty.$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x} - x^2}{3x\sqrt{3x} + 2x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}(3\sqrt{3} + 2\sqrt{x})} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} (1-\sqrt{x})}{\lim\limits_{x \to 0^+} (3\sqrt{3} + 2\sqrt{x})} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

c) $$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2|x-1|} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{-2(x-1)} = -\frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{2|x - 1|} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{2(x - 1)} = \dfrac{1}{2}$.

Ghi chú : Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x^0} f(x)$.

Trong bài tập này $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{2|x - 1|} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x - 1}{2|x - 1|}$.

173 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

Hướng dẫn

a) Với $x > 1$ thì $|x - 1| = x - 1$.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2.$$

b) Với $x < 1$ thì $|x - 1| = -(x - 1)$, do đó

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = -2.$$

174 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x}{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x}{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{2x + 5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{2x + 5}$.

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x}{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x(2x - 1)}{x\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}}} = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x}{\sqrt[3]{x^3 + 2x - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{\sqrt[3]{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}}} = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1 + \dfrac{3}{x}} + x}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x\left(\sqrt{1 + \dfrac{3}{x}} - 1\right)}{x\left(2 + \dfrac{5}{x}\right)} = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{2x + 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{3}{x}} + 1\right)}{x\left(2 + \dfrac{5}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{3}{x}} + 1}{2 + \dfrac{5}{x}} = 1.$

175 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)$.

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 7} + 3}{\sqrt{x + 2} + 2} = 3.$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2} = 0.$

§6. Các dạng vô định

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$

Là các bài toán tìm giới hạn $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$*, trong đó* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ *hoặc* $\lim f(x) = \infty$, $\lim g(x) = \infty$ *khi* $x \to x_0$ *hoặc* $x \to x_0^+$ *hoặc* $x \to x_0$ *hoặc* $x \to \pm\infty$.

Khi giải các bài toán loại này ta phải biến đổi để khử dạng vô định nhằm áp dụng các định lí giới hạn.

2. Dạng $0.\infty$

Dạng toán tìm giới hạn $\lim[f(x).g(x)]$ *trong đó* $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \infty$ *khi* $x \to x_0$, *hoặc* $x \to x_0^+$ *hoặc* $x \to x_0$ *hoặc* $c \to \infty$.

3. Dạng $\infty - \infty$

Dạng toán tìm giới hạn $\lim[f(x) - g(x)]$*, trong đó* $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$ *hoặc* $\lim f(x) = \lim g(x) = -\infty$ *khi* $x \to x_0$ *hoặc* $x \to x_0^+$ *hoặc* $x \to x_0$ *hoặc* $x \to \infty$

BÀI TẬP

176 Tìm gới hạn :   **a)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 2)^3 - 8}{2x}$.

Hướng dẫn

a) Khi x dần tới 3, hàm số f(x) có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Để tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ta phải khử dạng vô định bằng cách rút gọn phân thức. Với mọi $x \neq 3$, ta có : $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{x - 2}{x + 3}$, suy ra

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 2}{x + 3} = \frac{1}{6}.$$

b) Tương tự câu a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^3 - 8}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 + 6x + 12)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 6x + 12}{2} = 6.$$

177 Tìm giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 2x - 3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 7x + 10}$.

Hướng dẫn

a) Với $x \neq 1$, $\frac{x^2 - 10x + 9}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x - 9}{x + 3}$. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$.

b) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \frac{8}{3}$.

178 Tìm giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x|x - 2|}{x^2 + x - 6}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2}}{3x}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\frac{2x|x - 2|}{x^2 + x - 6} = \frac{2x|x - 2|}{(x - 2)(x + 3)}$

Với $x < 2$ thì $|x - 2| = -x + 2$, do đó :

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x|x - 2|}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} = \lim_{x \to 2} \frac{-2x}{x + 3} = -\frac{4}{5}.$$

b) $$\frac{\sqrt{2x^4 + x^2}}{3x} = \frac{|x|\sqrt{2x^2 + 1}}{3x} = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{2x^2 + 1}}{3} & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2}}{3x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{2x^2 + 1}}{3} = -\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2}}{3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Vì $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ nên *không tồn tại* giới hạn $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2}}{3x}$.

179 Tìm giới hạn :

a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x^3 + 1)(2x - 1)}$ **b)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x^3 + 1)(2x - 1)}$.

Hướng dẫn

a) $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{2}.$$

b) Tương tự câu a) : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Ghi chú : Trong bài toán này ta có $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên ta có thể viết $\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Trường hợp $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó P(x) là đa thức có hạng tử bậc cao nhất là ax^n $(a \neq 0)$, Q(x) là đa thức có hạng tử bậc cao nhất là bx^m $(b \neq 0)$ thì $\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{ax^n}{bx^m}$.

180 Tìm giới hạn :

a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{2x + 5}$ **b)** $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 + x - 3}{x^4 - 3x^3 + 2}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x - 5 + \frac{2}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = -\infty.$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}}{x - 3 + \dfrac{2}{x^3}} = 0.$

181 Tìm giới hạn dạng $\infty - \infty$, dạng $\infty.0$:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2} \right).$

Hướng dẫn

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x}[(x + 3) - x|}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}(3\sqrt{2})}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{3}{x}} + 1\right)} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{4}{(x - 2)(x + 2)} - \dfrac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x + 2}{(x - 2)(x + 2)} = -\dfrac{1}{4}.$

182 Tìm giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty}(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1}.$

Hướng dẫn

a) $= \lim\limits_{x \to 0}(\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 + x} + 1) = 3.$ **b)** $-\dfrac{1}{4}.$

c) $= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x^2 - 2x - 1) - (x^2 - 7x + 3)}{\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 3}} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{5x - 4}{2|x|}.$

d) $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1} = \dfrac{1}{4}.$

183 Tìm giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)[\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}|.$

Hướng dẫn

a) $\dfrac{1}{3}$ **b)** $+\infty.$

§7. Hàm số liên tục

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Hàm số f(x) xác định trên (a; b) ***liên tục tại*** $\boldsymbol{x_0}$ $\in$ *(a; b) nếu*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Hàm số f(x) không liên tục tại x_0 *gọi là* ***gián đoạn*** *tại* x_0.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- *Hàm số f(x) xác định trên (a; b) và liên tục tại mọi điểm* $x_0 \in (a; b)$ *gọi là* ***liên tục trên khoảng (a; b)***.
- *Hàm số f(x) xác định trên [a; b], liên tục trên (a; b) và*

  $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *được gọi là* ***liên tục trên đoạn*** *[a; b].*

3. Một số định lí về hàm số liên tục

Định lí 1. *Các hàm số đa thức liên tục trên tập số thực R. Các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của nó.*

Định lí 2. *Nếu f(x) và g(x) là các hàm số liên tục trên khoảng K thì :*

a) Các hàm số $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$ *liên tục trên K.*

b) Nếu $g(x) \neq 0$ $\forall x \in K$ *thì hàm số* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *liên tục trên K.*

c) Nếu $f(x) \geq 0$ $\forall x \in K$ *thì hàm số* $\sqrt{f(x)}$ *liên tục trên K.*

Định lí 3. *Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a; b],* $f(a) \neq f(b)$ *thì với mỗi số M nằm giữa f(a) và f(b) có ít nhất số* $c \in (a; b)$ *sao cho f(c) = M.*

Hệ quả. *Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a; b] và* $f(a).f(b) < 0$ *thì tồn tại* $c \in (a; b)$ *sao cho f(c) = 0. Điều này có nghĩa là phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (a; b).*

BÀI TẬP

184 Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{với } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{với } x \geq -1 \end{cases}$

Chứng minh rằng hàm số f(x) liên tục trên tập số thực R.

Hướng dẫn

Vì $2x + 5$ và $x^2 + 2$ là các đa thức, theo định lí 1 thì $2x + 5$ liên tục trên $(-\infty; -1)$ và $x^2 + 2$ liên tục trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$. Do đó để chứng minh f(x) liên tục trên R ta chỉ cần chứng minh f(x) liên tục tại $x = -1$. Ta có : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 2(-1) + 5 = 3$,

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = (-1)^2 + 2 = 3 = \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = f(-1).$$

Vậy hàm số f(x) liên tục tại $x = -1$, do đó liên tục trên R.

185 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1 \\ 3 & \text{với } x = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng f(x) liên tục tại $x = 1$.

Hướng dẫn

Chứng minh $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$.

186 Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ A & \text{với } x = 0 \end{cases}$

Với giá trị nào của A thì hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Hướng dẫn

Với $x \in [-1; 0)$ và $x \in (0; 1]$ thì các hàm số : $g(x) = \sqrt{1 - x^2} - 1$ và $h(x) = x$ liên tục và $h(x) \neq 0$.

Theo định lí 2 thì $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ liên tục trên $[-1; 1]\backslash\{0\}$.

Xét sự liên tục của f(x) tại $x = 0$, ta có :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{1 - x} + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Để f(x) liên tục trên $[-1; 1]$ thì f(x) phải liên tục tại $x = 0$, tức là phải có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{2}$.

187 Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{với } x \leq 1 \\ ax^2 - 2 & \text{với } x > 1. \end{cases}$

Hãy xác định giá trị của a để hàm số liên tục trên R. *Đáp số* $a = 2$.

188 Chứng minh rằng các phương trình cho dưới đây luôn có nghiệm

a) $x^3 - x^2 - 1 = 0$ **b)** $x^4 - 3x + 1 = 0$.

Hướng dẫn

a) Hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ (hàm đa thức) liên tục trên R, ta có :

$$f(1) = -1 < 0, \qquad f(2) = 3, \qquad f(1).f(2) < 0,$$

theo định lí 3, phương trình $f(x) = 0$, tức phương trình $x^3 - x^2 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

b) Tương tự câu a) $f(x) = x^4 - 3x + 1$ liên tục trên R.

$$f(1).f(2) = (-1)(11) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 3x + 1 = 0 \text{ có nghiệm.}$$

189 Chứng minh rằng nếu hàm số f(x) xác định và liên tục trên $[a; b]$ thì với các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bất kì thuộc $[a; b]$ đều có một số $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$.

Hướng dẫn

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thuộc $[a; b]$ ta có $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n)$ thì rõ ràng lấy $c = x_1 \in [a; b]$

$$f(c) = f(x_1) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

Nếu có ít nhất cặp giá trị x_p, x_q với $1 \le p, q \le n$: $f(x_p) \ne f(x_q)$

Khi đó tồn tại $m = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$,

$M = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ và

$$m = \frac{1}{n}[\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ số } m}] < f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] < \frac{1}{n}[\underbrace{M + M + \ldots +}_{n \text{ số } M}$$

$$= M$$

Theo *định lí 3* của hàm số liên tục thì $c \in (a; b)$.

190 Chứng minh với mọi $a, b, c \in R$.

a) Phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm.

b) Phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Hướng dẫn

a) Chứng minh $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên R, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ khi đó tồn tại $x_1 < m < 0$ để $f(x_1) < 0$ và $x_2 > M > 0$ để $f(x_2) > 0$, phương trình có ít nhất một nghiệm $x_0 \in [x_1; x_2]$.

b) Ta có : $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1$, $f(0) = -1 < 0$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_1 < m < 0$ để $f(x_1) > 0$, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in [m; 0]$.

Tương tự, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; +\infty)$.

CHƯƠNG V

ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

1. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Định nghĩa. *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn sau đây :*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

thì giới hạn trên được gọi là ***đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0***, *kí hiệu là $f'(x_0)$ hay y'_{x_0}.*

2. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Định nghĩa. *Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên K nếu $f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm bất kì $x_0 \in K$.*

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ được kí hiệu là y' hay $f'(x)$.

Định lí. *Với mọi $x \in R$ ta có :*

a) $f(x) = c$ thì $f'(x) = 0$

b) $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$

c) $f(x) = x^n$, $n \in N^*$ thì $f'(x) = nx^{n-1}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ thì $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là ***hệ số góc của tiếp tuyến*** *của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.*

Phương trình của tiếp tuyến của đồ thị tại $M_0(x_0; f(x_0))$ là :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- ***Vận tốc tức thời.*** *Một chất điểm chuyển động với phương trình $S = s(t)$ thì* ***vận tốc tức thời*** *của chất điểm tại thời điểm t_0 là :*

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

- ***Cường độ tức thời*** *tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $q = q(t)$ là :*

$$I(t_0) = q'(t_0)$$

§2. Các quy tắc tính đạo hàm

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số

Giả sử $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số đều có đạo hàm tại x thuộc khoảng xác định thì

a) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

b) $(u.v)' = u'v + uv'$

Hệ quả. *Với k là hằng số thì $(ku)' = ku'$.*

c) Với $v \neq 0$: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Hệ quả. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Định lí. *Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số $F(x) = f(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 với $F'(x_0) = f'(u_0).u'(x_0)$.*

Hệ quả.

a) $[u^n(x)]' = nu^{n-1}(x)u'(x)$ b) $[\sqrt{u(x)}]' = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x)$.

BÀI TẬP

191 Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$. Tính số gia của hàm số tại điểm $x_0 = 2$ với số gia của đối số cho tương ứng.

a) $\Delta x = 0,1$ **b)** $\Delta x = 0,2$.

Hướng dẫn

a) Số gia của hàm số tại $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 0,1$ là :

$\Delta f = f(2 + 0,1) - f(2) = (2(2,1)^2 - 3(2,1) + 1] - [2.2^2 - 3.2 + 1] = 3,52$.

b) Số gia tại $x_0 = 2$ ứng với $\Delta x = 0,2$ là :

$\Delta f = f(2 + 0,2) - f(x)| = 4,08$.

192 Tính số gia của hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm đã cho cùng với số gia của đối số tương ứng.

a) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$ **b)** $x_0 = 1,5$, $\Delta x = 0,3$.

Đáp số : **a)** $\Delta y = 0,331$ **b)** 5,832.

193 Dùng định nghĩa, tìm đạo hàm của hàm số tại điểm đã cho tương ứng

a) $y = x^2 - 3x + 2$ tại $x_0 = 2$

b) $y = x^3 + 2x + 1$ tại $x_0 = 1$.

Hướng dẫn

a) Tìm số gia của hàm số tại $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(2 + \Delta x) - f(2)\\ &= [(2 + \Delta x)^2 - 3(2 + \Delta x) + 2] - [2^2 - 3.2 + 2]\\ &= \Delta x + \Delta x^2.\end{aligned}$$

Lập tỉ số : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 1 + \Delta x.$

Đạo hàm của hàm số tại x = 2, theo định nghĩa bằng

$$y'(2) = f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

b) Làm tương tự câu a) ta được $y'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (5 + 3\Delta x + \Delta x^2) = 5.$

194 Dựa vào định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số tại điểm x_0.

a) $y = \dfrac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

b) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại $x_0 = 0$.

Hướng dẫn

a) $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = \dfrac{1}{2 + \Delta x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\Delta x}{2(2 + \Delta x)}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{2(2 + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{4} = y'(2).$$

b) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\left[\dfrac{\Delta x - 1}{\Delta x + 1} - \dfrac{0 - 1}{0 + 1}\right] = \dfrac{2}{\Delta x + 1}$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{2}{\Delta x + 1}\right] = 2.$$

195 Dựa vào định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau đây tại điểm x

a) $y = \sqrt{x} - x$

b) $y = x^3 + 2x$.

Hướng dẫn

a) $y'(x) = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \Delta x - \sqrt{x}}{\Delta x} = \dfrac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

b) $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x}[(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - x^3 - 2x]$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 2 + 3x\Delta x + \Delta x^2] = 3x^2 + 2.$

196 Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số sau đây tại điểm x.

a) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ **b)** $y = \sqrt{x + 1} + x$.

Hướng dẫn

a) $y'(x) = \dfrac{3}{(x + 1)^2}$ **b)** $y'(x) = \dfrac{1 + 2\sqrt{x + 1}}{2\sqrt{x + 1}}$.

197 Cho hàm số $y = x^2 + 1$. Trên đồ thị của hàm số đã cho, lấy hai điểm $A(0,5;\ 1,25)$ và $B(0,5 + \Delta x;\ 1,25 + \Delta y)$.

a) Tìm hệ số góc của cát tuyến AB ứng với $\Delta x = 1,5$; $\Delta x = 0,5$; $\Delta x = 0,1$.

b) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm A.

Hướng dẫn

a) $\Delta y = [(0,5 + \Delta x)^2 + 1] - (0,5^2 + 1) = \Delta x + \Delta x^2$

Hệ số góc của cát tuyến AB là : $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \Delta x$

- Hệ số góc của AB ứng với $\Delta x = 1,5$ là :

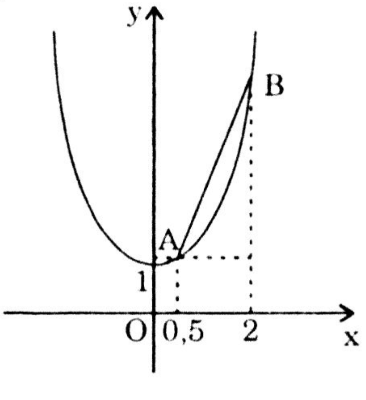
  $k_1 = 1 + 1,5 = 2,5$

- Hệ số góc của AB ứng với $\Delta x = 0,5$ là :

  $k_2 = 1 + 0,5 = 1,5$

- Hệ số góc của AB ứng với $\Delta x = 0,1$ là :

  $k_3 = 1 + 0,1 = 1,1.$



b) Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 1$ tại điểm $A(0,5;\ 1,25)$ là :

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x) = 1.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số f(x) tại $A(0,5;\ 1,25)$ bằng giá trị của đạo hàm tại A bằng $f'(0,5) = 1$.

198 Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - x + 1$.

a) Tìm đạo hàm của hàm số tại điểm x.

b) Tìm phương trình của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm thuộc đồ thị có hoành độ x = 1.

Hướng dẫn

a) Đạo hàm tại điểm x :

$$y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 1] - [2x^2 - x + 1]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x - \Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = 4x - 1.$$

b) Phương trình của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm A(1; 2) là :

$$y = f'(1).[x - 1] + f(1) = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1.$$

$\boxed{\textbf{199}}$ Một chất điểm chuyển động với quãng đường đi phụ thuộc thời gian t theo phương trình : $S = 5t^2 - 9t + 10$

(quãng đường S được tính bằng mét, thời gian t tính bằng giây).

a) Tính vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t = 1 đến t = 4.

b) Tính vận tốc tức thời tại thời điểm t = 1, t = 4.

Hướng dẫn

a) Vận tốc trung bình từ t = 1 đến t = 4 là :

$$v_{tb} = \frac{S(4) - S(1)}{4 - 1} = \frac{54 - 6}{3} = 16\text{m/s}.$$

b) Đạo hàm của hàm số S(t) tại điểm t

$$S'(t) = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5(t + \Delta t)^2 - 9(t + \Delta t) + 10] - [5t^2 - 9t + 10]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} [10t - 9 + 5\Delta t] = 10t - 9$$

- Vận tốc tức thời tại thời điểm t = 1 là $v(1) = 10 - 9 = 1\text{m/s}$.
- Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 4 là :

$$v(4) = 10.4 - 9 = 31\text{m/s}.$$

$\boxed{\textbf{200}}$ Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm với mọi x thuộc miền xác định. Chứng minh :

a) Nếu f(x) là hàm số chẵn thì f '(x) là hàm số lẻ.

b) Nếu f(x) là hàm số lẻ thì f '(x) là hàm số chẵn.

Hướng dẫn

a) Ta có : $$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x + \Delta x) - f(-x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Vì f(x) là hàm số chẵn nên $f(-x+\Delta x) = f(x-\Delta x)$, $f(-x) = f(x)$, do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \quad f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = -f'(x)$$

Vậy $f'(x)$ là hàm số lẻ.

b) Làm tương tự câu a).

201 Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$. Viết phương trình của tiếp tuyến với đồ thị của hàm số, biết :

a) Hoành độ tiếp điểm bằng −2.

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x + 3$.

Hướng dẫn

a) Tung độ tiếp điểm là : $f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + 1 = 7$.

Đạo hàm của hàm số tại điểm có hoành độ x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 1\right] - \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right]}{\Delta x} = x - 2$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm A(−2; 7) là :

$$y = f'(-2)[x-(-2)] + f(-2) = -4(x+2) + 7 = -4x - 1.$$

b) Tiếp tuyến tại điểm $A(x_0; f(x_0))$ song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ thì : $f'(x_0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - 2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 4$.

$$f(x_0) = f(4) = \frac{1}{2}(4)^2 - 2(4) + 1 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ là : $y = 2(x-4) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 7$.

202 Tìm đạo hàm của các hàm số sau đây tại điểm cho tương ứng :

a) $f(x) = x^2 - x + 3$ tại $x_0 = 2$.

b) $f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{3} + 5x + 2$ tại $x_0 = -2$.

c) $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^2} + 2x$ tại $x_0 = 1$.

Hướng dẫn

a) Theo quy tắc tính đạo hàm của tổng :

$$f'(x) = [x^2 - x + 3]' = (x^2)' + (-x)' + (3)' = 2x - 1$$

$$f'(2) = 2(2) - 1 = 3.$$

b) Làm tương tự câu a)

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x + 5, \qquad f'(-2) = 30\frac{1}{3}.$$

c) $f'(x) = (x^4)' + \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' + (2x)' = 4x^3 - \dfrac{2}{x^3} + 2, \qquad f'(1) = 4.$

$\boxed{\textbf{203}}$ Tìm đạo hàm các hàm số sau :

a) $y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$ **b)** $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$.

Hướng dẫn

a) Đặt $u = 2x + 3$, $v = x^2 + 3x - 1$, theo quy tắc tính đạo hàm tích hai hàm số, ta có :

$$\begin{aligned} y' &= (uv)' = u'v + uv' = (2x + 3)'(x^2 + 3x - 1) + (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)' \\ &= 2(x^2 + 3x - 1) + (2x + 3)(2x + 3) = 6x^2 + 18x + 7. \end{aligned}$$

b) Làm tương tự câu a)

$$y' = 7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 3.$$

$\boxed{\textbf{204}}$ Tính đạo hàm của các hàm số :

a) $y = x^3(x^2 + 1)(x + 1)$

b) $y = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^4 + 4)$.

Hướng dẫn

a) Đặt $u = x^3$, $v = x^2 + 1$, $w = x + 1$, theo quy tắc tính đạo hàm tích các hàm số, ta có :

$$\begin{aligned} y' &= (u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w' \\ &= 3x^2.(x^2 + 1)(x + 1) + x^3(2x).(x + 1) + x^3(x^2 + 1) \\ &= 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2. \end{aligned}$$

b) Làm tương tự câu a).

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + 1)'(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^4 + 4) + (x^2 + 1)(x^2 + 2)'(x^2 + 3)(x^4 + 4) \\ &\quad + (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)'(x^4 + 4) + (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^4 + 4)' \\ &= 10x^9 + 48x^7 + 90x^5 + 120x^3 + 88x. \end{aligned}$$

Ghi chú : Ta có thể khai triển biểu thức của y dưới dạng một đa thức

$$y = x^{10} + 6x^8 + 15x^6 + 30x^4 + 44x^2 + 24.$$

Lấy đạo hàm tổng trên ta được kết quả như đã biết.

205 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = (1 - 2x^3)^{10}$ **b)** $y = (5x^2 + x - 4)^5$.

Hướng dẫn

a) Áp dụng quy tắc tính đạo hàm hàm số hợp :

$y' = [u^m]' = mu^{m-1}u'$, với $u = 1 - 2x^3$

ta có : $y' = [(1 - 2x^3)^{10}]' = 10.(1 - 2x^3)^9.(1 - 2x^3)'$

$= -60x^2(1 - 2x^3)^9$.

b) Làm tương tự như trên :

$y' = [(5x^2 + x - 4)^5]' = 5(5x^2 + x - 4)^4.(5x^2 + x - 4)'$

$= 5(10x + 1)(5x^2 + x - 4)^4$.

206 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = \dfrac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{2x^4}{9 - x^2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $y' = \dfrac{(x^3 - 2x)'(x^2 + x + 1) - (x^3 - 2x)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2}$

$$= \frac{(3x^2 - 2)(x^2 + x + 1) - (x^3 - 2x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

b) Làm tương tự câu a) : $y' = \dfrac{-4x^5 + 72x^3}{(9 - x^2)^2}$.

207 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}$ **b)** $y = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Hướng dẫn

a) $y' = [\sqrt{u}]' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với $u = x^3 - 2x^2 + 1$

$$y' = \frac{[x^3 - 2x^2 + 1]'}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}} = \frac{3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}.$$

b) $y' = \dfrac{(2x + 1)'\sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{x^2 + 1})'(2x + 1)}{x^2 + 1} = \dfrac{2 - x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

208 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = x^3 - x\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 1$

b) $y = x(2x + 1)(5x - 2)$

c) $y = (x^2 - 1)^3$

d) $y = \frac{x + 1}{2x + 3}$

e) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$

g) $y = \frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$.

Hướng dẫn

a) $y' = 3x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$

b) $y' = 30x^2 + 2x - 2$

c) $y' = 6x(x^2 - 1)^2$

d) $y' = \frac{1}{(2x + 3)^2}$

e) $y' = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

g) $y' = \frac{x + 3}{(x + 1)\sqrt{x + 1}}$.

§3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

Định lí 1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Định lí 2. $[\sin x]' = \cos x$

Hệ quả. $[\sin u(x)]' = \cos u(x).u'(x)$

Định lí 3. $[\cos x]' = -\sin x$

Hệ quả. $[\cos u(x)]' = -\sin u(x).u'(x)$

Định lí 4. $[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *với mọi* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Hệ quả. $[\tan u(x)]' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ *với mọi x mà* $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Định lí 5. $[\cot x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ *với mọi* $x \neq k\pi$

Hệ quả. $[\cot u(x)]' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$ *với* $x : u(x) \neq k\pi$.

§4. Vi phân

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x.

Tích $f'(x)\Delta x$, kí hiệu $df(x)$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại điểm x ứng với số gia Δx đã cho :

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

Vì $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$ nên ta có :

$$df(x) = f'(x)dx \qquad \text{hay} \qquad dy = y'dx.$$

2. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ ta có :

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \qquad \text{tức là} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

Suy ra $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$

§5. Đạo hàm cấp cao

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đạo hàm $f'(x)$ còn có kí hiệu $f'(x) = f^{(1)}(x)$. Nếu hàm số $f^{(1)}(x)$ lại có đạo hàm thì $[f^{(1)}(x)]' = f^{(2)}(x)$ là đạo hàm cấp hai của $f(x)$... Một cách tổng quát :

Đạo hàm cấp n ($n \in N$, $n \geq 2$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n - 1)$ của hàm số $f(x)$, nghĩa là :

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2

Gia tốc tức thời *tại thời điểm t_0 của chất điểm có phương trình chuyển động là $S(t)$ là :*

$$\gamma(t_0) = S''(t_0) = S^{(2)}(t_0)$$

BÀI TẬP

209 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ với a, b ∈ R; a ≠ 0, b ≠ 0.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin 2x}$.

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}.ax}{\frac{\sin bx}{bx}.bx}=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}.$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x.\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2x\cos\frac{x}{2}\cos x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\lim\limits_{x\to 0}4\cos\frac{x}{2}\cos x}=\frac{1}{4}.$$

210 Tìm giới hạn các hàm số :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

Hướng dẫn

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{\sin(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}}=\frac{5}{1}=5.$$

b) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos x}.\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x.\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}=1.1=1.$$

211 Tìm giới hạn : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \cos x}{x^2}$.

Hướng dẫn

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x^2 - \cos^2 x)}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\sin^2 \dfrac{x}{2}(1 + \cos x)}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\left[1 + \dfrac{1 + \cos x}{2} \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]}{x^2(\sqrt{1 + x^2} + \cos x)} = \frac{2}{2} = 1.$$

212 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = 3\sin(2x - 1)$

b) $y = \tan(2x + 5)$

c) $y = \cos^3(x^2 + 1)$

d) $y = \cot\left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)$.

Hướng dẫn

a) $y' = [3\sin(2x - 1)]' = 3[\sin(2x - 1)]' = 3\cos(2x - 1).(2x - 1)'$

$= 6\cos(2x - 1)$

b) $y' = [\tan(2x + 5)]' = \dfrac{(2x + 5)'}{\cos^2(2x + 5)} = \dfrac{2}{\cos^2(2x + 5)}$

c) $y' = [\cos^3(x^2 + 1)]' = 3\cos^2(x^2 + 1).[\cos(x^2 + 1)]'$

$= -3\cos^2(x^2 + 1).\sin(x^2 + 1).[x^2 + 1]'$

$= -6x\cos^2(x^2 + 1).\sin(x^2 + 1)$

d) $y' = \left[\cot\left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)\right]' = -\dfrac{\left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)'}{\sin^2\left(3x^2 \dfrac{x}{2}\right)} = -\dfrac{12x + 1}{2\sin^2\left(3x^2 + \dfrac{x}{2}\right)}$.

213 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = (1 + \sin^2 x)^4$

b) $y = \cos^2\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)$.

Hướng dẫn

a) $y' = [(1 + \sin^2x)^4]' = 4(1 + \sin^2x)^3.(1 + \sin^2x)' = 4(1 + \sin^2x)^3.2\sin x(\sin x)'$

$= 8\sin x\cos x(1 + \sin^2x)^3.$

b) $y' = 2\cos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left[\cos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\right]' = -2\cos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\sin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$

$= \dfrac{2}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\sin\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cos\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).$

214 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = \sin(x^2 + \sqrt{x})$ **b)** $y = \cot^2(3x - 1)$

c) $y = \tan^3(2x + 1)$ **d)** $y = \cos^3(\sin 2x)$.

Hướng dẫn

a) $y' = \left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos(x^2 + \sqrt{x}).$

b) $y' = 2\cot(3x - 1).[\cot(3x - 1)]' = -6\dfrac{\cot(3x-1)}{\sin^2(3x-1)}.$

c) $y' = \dfrac{6}{\cos^2(2x+1)}\tan^2(2x + 1).$

d) $y' = 3\cos^2(\sin 2x).[\cos(\sin 2x)]' = -6\cos 2x.\sin(\sin 2x)\cos^2(\sin 2x).$

215 Tìm đạo hàm của các hàm số :

a) $y = \tan\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x}{2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{x}$

c) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ **d)** $y = x\tan x$

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$ **f)** $y = \sin^2(\cos 3x)$.

Hướng dẫn

a) $y' = -\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}$

b) $y' = \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{x\sin x + \cos x}{x^2} = (\cos x + x\sin x)\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $y' = \dfrac{2}{1 + \sin 2x}$ **d)** $y' = \dfrac{2x + \sin 2x}{2\cos^2 x}$

e) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1 + 2\tan x}}$

f) $y = -6\sin 3x.\cos(\cos 3x)\sin(\cos 3x)$.

216 Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau :

a) $y = (x + 3)(2x^2 - x + 1)$ **b)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Hướng dẫn

a) $y = (x + 3)'(2x^2 - x + 1) + (x + 3)(2x^2 - x + 1)' = 6x^2 + 10x - 2$

$y' = (6x^2 + 10x - 2)' = 12x + 10$.

b) $y = [\sqrt{x^2 + 1}]' = \dfrac{[x^2 + 1]'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$y' = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right]' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - [\sqrt{x^2 + 1}]'x}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

217 Tìm đạo hàm cấp bốn của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{3}{5}x^3 - 4x^2 + 7x + 1$ **b)** $y = \cos^2 x$.

Hướng dẫn

a) $y = \dfrac{9}{5}x^2 - 8x + 7$; $y^{(2)} = [y']' = \dfrac{18}{5}x - 8$; $y^{(3)} = [y^{(2)}]' = \dfrac{18}{5}$;

$$y^{(4)} = \left[\frac{18}{5}\right]' = 0.$$

Ghi chú : Nếu y = f(x), trong đó f(x) là một đa thức bậc n thì mọi đạo hàm cấp lớn hơn n của f(x) đều bằng 0.

b) $y' = y^{(1)} = [\cos^2 x]' = 2\cos x(\cos x)' = -2\sin x\cos x = -\sin 2x$

$y^{(2)} = [-\sin 2x]' = -\cos 2x[2x]' = -2\cos 2x$

$y^{(3)} = [-2\cos 2x]' = 4\sin 2x$

$y^{(4)} = 8\cos 2x$.

218 Bằng phương pháp quy nạp tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{1 + x}$.

Hướng dẫn

Ta có : $y^{(1)} = \left[\dfrac{1}{1 + x}\right]' = -\dfrac{1}{(1 + x)^2}$

$$y^{(2)} = \left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]' = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^{(3)} = -\frac{2.3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{2.3}{(1+x)^4}$$

Dự đoán : $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(1+x)^{n+1}}$ (1)

Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp :

- Rõ ràng mệnh đề đúng với n = 1.
- Giả sử mệnh đề đúng với n = k :

$$y^{(k)} = \frac{(-1)^k.k!}{(1+x)^{k+1}}$$

$$y^{(k+1)} = [y^{(k)}]' = (-1)^k.k!\,\frac{-(k+1)(1+x)^k}{(1+x)^{2(k+1)}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$

Mệnh đề đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

219 Chứng minh bằng phương pháp quy nạp, với mọi $n \in N^*$ ta có :

a) $[\sin ax]^{(n)} = a^n \sin\left(ax + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (1)

b) $[\cos bx]^{(n)} = b^n \cos\left(bx + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)

Hướng dẫn

a) Với n = 1, ta có : $[\sin ax]' = \cos(ax).(ax)' = a\cos(ax) = a\sin\left(ax + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Giả sử với n = k, ta có : $[\sin ax]^{(k)} = a^k.\sin\left(ax + k.\dfrac{\pi}{2}\right)$

Khi đó $[\sin ax]^{(k+1)} = a^k\cos\left(ax + k\dfrac{\pi}{2}\right)\left(ax + k\dfrac{\pi}{2}\right)' = a^{k+1}\cos\left(ax + k\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$= a^{k+1}\sin\left(ax + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a^{k+1}\sin\left(ax + (k-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy (1) đúng với mọi $n \in N^*$.

b) Chứng minh tương tự câu a).

$\boxed{220}$ Tìm đạo hàm cấp đã chỉ ra tương ứng của hàm số :

a) $y = \dfrac{2x - 3}{3x + 2}$; tìm $y^{(3)}$ b) $y = \sqrt{1 + x^2}$; tìm $y^{(4)}$.

Hướng dẫn

a) $y^{(3)} = \dfrac{702}{(3x + 2)^4}$ b) $y^{(4)} = \dfrac{12x^2 - 3}{(1 + x^2)^3\sqrt{1 + x^2}}$.

$\boxed{221}$ Cho hàm số $y = \dfrac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$.

a) Chứng minh rằng : $y = 5 + \dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{4}{x - 3}$.

b) Tìm $y^{(n)}$ với $n > 1$, $n \in N$.

Hướng dẫn

a) Thực hiện cộng các phân thức.

b) $y^{(n)} = 3\left(\dfrac{1}{x + 1}\right)^{(n)} + 4\left(\dfrac{1}{x - 3}\right)^{(n)}$

Sử dụng kết quả bài (218) ta được :

$$y^{(n)} = (-1)^n.n!\left[\frac{3}{(x + 1)^{n+1}} + \frac{4}{(x - 3)^{n+1}}\right].$$

$\boxed{222}$ Tìm đạo hàm cấp n của hàm số : $y = 5\sin x\sin 3x$.

Hướng dẫn

Ta có : $y = 5\sin x\sin 3x = \dfrac{5}{2}[\cos 2x - \cos 4x]$

Sử dụng kết quả bài (219) ta được :

$$y^{(n)} = \frac{5}{2}\left[2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) - 4^n\cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\boxed{223}$ Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$. Hãy so sánh số gia và vi phân của hàm số tại điểm $x_0 = 2$, ứng với các số gia Δx của biến số cho dưới đây :

a $\Delta x = 1$ b) $\Delta x = 0{,}1$ c) $\Delta x = 0{,}01$.

Hướng dẫn

Ta có : $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$. Tại điểm $x_0 = 2$ thì :

Số gia : $\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^4 - (2 + \Delta x)^2 + 1) - (x^4 - x^2 + 1)]$

$\Delta y = 28\Delta x + 23\Delta x^2 + 8\Delta x^3 + \Delta x^4$.

Vi phân : $dy = f'(2)\Delta x = (4.2^3 - 2.2)\Delta x = 28\Delta x$.

a) Với $\Delta x = 1$, số gia của hàm số $\Delta y = 60$, vi phân $dy = 28$.

b) Với $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$ thì

$$\Delta y = 28.0,1 + 23.0,1^2 + 8.0,1^3 + 0,1^4 = 3,0381$$

và $dy = 28.0,1 = 2,8$.

c) Với $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$ ta có :

$$\Delta y = 0,28230801, \quad dy = 0,28$$

Như vậy, với số gia Δx khá nhỏ thì $\Delta y \approx dy$.

224 Tìm vi phân của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{1 - x^2}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $y = x\cos x - \sin x$ **d)** $y = \tan(x^2 - 2x)$.

Hướng dẫn

Theo công thức $dy = y'dx$, tách đạo hàm mỗi hàm số, thay vào công thức thì được :

a) $dy = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$ **b)** $dy = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}dx$

c) $dy = -x\sin x dx$ **d)** $dy = \dfrac{2(x - 1)}{\cos^2(x^2 - 2x)}dx$.

225 Tính gần đúng các số sau :

a) $\sqrt{51}$ **b)** $\tan 46^0$.

Hướng dẫn

a) Theo công thức : $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x_0 = 49$, $\Delta x = 2$ ta được :

$$\sqrt{51} = \sqrt{49 + 2} \approx \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}}.2 = 7 + \frac{1}{7} \approx 7,1429.$$

b) $\tan 46^0 = \tan(45^0 + 1^0) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{180}\right)$

$$\approx \tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{2\pi}{180} \approx 1,0349.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V

226 Tìm đạo hàm các hàm số :

a) $y = (x^2 + x - 3)\sin 2x$ b) $y = \dfrac{\sin(\sqrt{x^2 - x + 1})}{x + 1}$

c) $y = (2x + 1)^3.\tan x$.

Hướng dẫn

a) $y' = (2x + 1)\sin 2x + 2(x^2 + x - 3)\cos 2x$

b) $y' = \dfrac{(2x^2 + x - 1)\cos\sqrt{x^2 - x + 1}}{2(x + 1)^2\sqrt{x^2 - x + 1}} - \dfrac{\sin\sqrt{x^2 - x + 1}}{(x + 1)^2}$

c) $y' = 6(2x + 1)^2\tan x + \dfrac{(2x + 1)^3}{\cos^2 x}$.

227 Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy chỉ rõ rằng mỗi hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức tương ứng :

a) $y = \dfrac{x - 3}{x + 4}$ thỏa mãn $2(y')^2 = (y - 1)y''$

b) $y = \sqrt{2x - x^2}$ thỏa mãn $y^3.y'' + 1 = 0$

c) $y = x + \sin 2x$ thỏa mãn $y'' + 4y = 4x$.

Hướng dẫn

Bạn tự giải.

228 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại mỗi giao điểm (nếu có) của đồ thị với trục hoành.

Hướng dẫn

Tọa độ giao điểm của đồ thị với trục hoành : $A(1 - \sqrt{3};\ 0)$, $B(1 + \sqrt{3};\ 0)$.

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại $A(1 - \sqrt{3};\ 0)$ và $B(1 + \sqrt{3};\ 0)$ theo thứ tự là :

$$y = -2(3 + 2\sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})$$

$$y = 2(2\sqrt{3} - 3)(x - 1 - \sqrt{3}).$$

229 Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x + 1)^2}{x - 1}$ đi qua điểm $A(-1;\ 2)$.

Hướng dẫn

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm thì tiếp tuyến là đường thẳng AM có hệ số góc là :

$$k = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = y'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y_A = y_0 + y'(x_0)(x_A - x_0)$$

Thay $x_A = -1$, $y_A = 2$, $y'(x_0) = \dfrac{x_0^2 - 2x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}$; $y_0 = \dfrac{(x_0 + 1)^2}{x_0 - 1}$ ta được :

$$\frac{(x_0 + 1)^2}{x_0 - 1} + \frac{x_0^2 - 2x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}(-1 - x_0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0$$

Suy ra $y_0 = -1$, $y'(x_0) = -3$, tiếp tuyến cần xác định là : $y = -3x - 1$.

230 Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = \dfrac{5}{4}x + 3$.

Hướng dẫn

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình :

$$\left[\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}\right]' = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 4.$$

Ta xác định được hai tiếp điểm là : $A\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $B\left(4; \dfrac{5}{2}\right)$

Các tiếp tuyến là : $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{1}{2}$ và $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{2}$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

Giải phương trình lượng giác (từ 231 đến 235).

231 a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

c) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)$.

Hướng dẫn

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{3}\right)$

DS : $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$; $\quad x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}$, $\quad k \in Z$.

b) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $\quad k \in Z$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 5x\right)$

DS : $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}$; $\quad x = k\pi$, $\quad k \in Z$.

232 a) $\cos^2 2x + \cos^2 x = \sin^2\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ b) $\cos 2x + 2\cos x + \sin^2 x + 1 = 0$.

Hướng dẫn

a) Thay $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. $\qquad$ Đáp số : $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$.

b) Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

DS : $x = \pi(2k + 1)$, $\quad k \in Z$.

233 a) $2\cos x(\sin x + \cos x) = 2 - \cos 2x$

b) $(1 + \sqrt{3})\sin x + (1 - \sqrt{3})\cos x = 2$.

Hướng dẫn

a) $\Leftrightarrow 2\cos 2x + \sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi$ trong đó $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

b) $\Leftrightarrow \quad (\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ĐS : $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\,;\quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

234 **a)** $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1 + \sqrt{3}$

b) $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 1.$

Hướng dẫn

a) $\Leftrightarrow \quad \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$ *ĐS* : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,;\quad x = \frac{\pi}{12} + k\pi.$

b) $\Leftrightarrow \quad \cos 2x - \sin 2x = -1$ *ĐS* : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,;\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

235 **a)** $6\tan^2 x - 2\cos^2 x = \cos 2x$ **b)** $1 + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{3}{2}\sin 4x.$

Hướng dẫn

a) Thay $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$

ĐS : $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi\,;\quad x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

b) $\Leftrightarrow \quad 1 + (\sin x + \cos 2x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 4x\right) = \frac{3}{2}\sin 4x$

Đặt $t = \sin 2x + \cos 2x$, $\sin 4x = t^2 - 1$ thì được :

$t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0$

ĐS : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,;\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

236 Cho phương trình : $\frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} = m$ (1)

Với các giá trị nào của m phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

Hướng dẫn

Với $m \neq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{-3m - 1}{m - 2}.$

Phương trình có hai nghiệm thuộc $[0; \pi]$ thì phải có :

$$\begin{cases} \dfrac{-3m-1}{m-2} \ge 0 \\ \dfrac{-3m-1}{m-2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \le m \le \frac{1}{4}.$$

237 Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau.

Hướng dẫn

Số chẵn được lập thành có chữ số hàng đơn vị là một trong các chữ số 0, 2, 4, 6.

Nếu chữ số hàng đơn vị là 0 thì có 6 cách chọn chữ số hàng vạn, 5 cách chọn chữ số hàng nghìn, 4 cách chọn chữ số hàng trăm và 3 cách chọn chữ số hàng chục. Vậy từ 7 chữ số trên có thể lập được :

6.5.4.3 = 360 số tận cùng bằng 0.

Lập luận tương tự, ta có 3 cách chọn chữ số hàng đơn vị khác 0, 5 cách chọn chữ số hàng vạn, 5 cách chọn chữ số hàng nghìn, 4 cách chọn chữ số hàng trăm, 3 cách chọn chữ số hàng chục. Số các số chẵn có hàng đơn vị khác 0 là : 5.5.4.3.3 = 900 số.

Số các số thỏa mãn yêu cầu là : 360 + 900 = 1260 số.

238 Một lớp học gồm 25 nam, 15 nữ. Người ta muốn lập một nhóm công tác gồm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn trong mỗi trường hợp dưới đây :

a) Nhóm 4 người không phân biệt nam, nữ.

b) Có 2 nam và 2 nữ.

c) Có ít nhất một nam.

Hướng dẫn

a) $C_{40}^4 = 91.390$ cách. **b)** $C_{25}^2.C_{15}^2 = 31.500$ cách.

c) $C_{40}^4 - C_{15}^4 = 90025$ cách.

239 Chứng minh các đẳng thức :

a) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n.2^{n-1}$ **b)** $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$

Hướng dẫn

a) Xét đa thức $P(x) = (1 + x)^n = 1 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n$

$$P'(x) = n(1 + x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \ldots + nC_n^nx^{n-1} \quad (1)$$

Trong (1) ta thay $x = 1$ được đpcm.

b) Trong (1) thay $x = -1$ ta được đpcm.

240 Một lớp học chỉ có các bàn đôi. Thầy giáo chủ nhiệm tính ra rằng có thể sắp học sinh của lớp theo 1560 sơ đồ khác nhau và số chỗ ngồi vừa đủ cho số học sinh của lớp. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh.

Hướng dẫn

$$A_n^2 = 1560 \quad \Rightarrow \quad n = 40.$$

241 Tung một lần hai con súc sắc. Tính xác suất :

a) Tổng số chấm trên hai con súc sắc bằng 7.

b) Tổng số chấm trên hai con súc sắc không lớn hơn 6.

Hướng dẫn

a) $P(A) = \frac{1}{6}$ **b)** $P(B) = \frac{7}{36}$.

242 Một bình đựng 10 viên bi chỉ khác nhau về màu sắc, trong đó có 7 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ.

b) Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi rồi lại lấy ngẫu nhiên một viên bi nữa. Tính xác suất để được một viên bi xanh ở lần thứ nhất và một viên bi đỏ ở lần thứ hai.

Hướng dẫn

a) $P(A) = \frac{C_7^2.C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$.

b) $P(\text{xanh, đỏ}) = P(\text{xanh}).P(\text{Đỏ/xanh}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$.

243 Một hộp đựng 9 viên bi chỉ khác nhau về màu sắc, trong đó có 6 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên một lúc 3 viên bi. Gọi X là số viên bi màu đỏ đã lấy được trong các viên bi đã lấy ra.

a) Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

b) Tính kì vọng và phương sai của X.

Hướng dẫn

a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{C_6^3}{C_9^3}$	$\frac{C_3^1C_6^2}{C_9^3}$	$\frac{C_3^2C_6^1}{C_9^3}$	$\frac{C_3^3}{C_9^3}$

b) Kì vọng $E(X) = 1$, phương sai $D(X) = \frac{1}{2}$.

244 Chứng minh bằng phương pháp quy nạp :

a) $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 với mọi $n \in N$.

b)

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Hướng dẫn

Bạn tự giải.

245 Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = n^2 - 2n + 2$.

Hãy xác định dãy (u_n) bằng công thức truy hồi.

Hướng dẫn

$u_1 = 1,$

$u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 2(n+1) + 2] - [n^2 - 2n + 2] = 2n - 1.$

Vậy (u_n) xác định bởi công thức truy hồi là : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 1. \end{cases}$

246 Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}$

Đặt $v_n = \dfrac{1 + u_n}{u_n}$. Chứng minh dãy (v_n) là một cấp số cộng. Hãy tìm số hạng tổng quát của (v_n) và (u_n).

Hướng dẫn

Ta có : $v_n = 1 + \dfrac{1}{u_n}$, $\qquad \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1 - u_n}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} - 1$

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{u_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \left(\frac{1}{u_n} - 1\right) - \frac{1}{u_n} = -1.$$

Vậy (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = \dfrac{1}{2}$, công sai $d = -1$.

Suy ra : $v_n = \dfrac{1}{2} - (n-1) = \dfrac{3}{2} - n$; $\qquad u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{2}{1 - 2n}$.

247 **a)** Tính các tổng vô hạn :

$S_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{16} + \ldots$; $\qquad S_2 = 1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{125} + \ldots$

b) Tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn 1,(07).

Hướng dẫn

a) Sử dụng công thức tính tổng của số nhân lùi vô hạn công bội q :

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

ta được $S_1 = \dfrac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]} = \dfrac{1}{3}$; $\quad S_2 = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}$.

b) $1,(07) = 1,070707\ldots = 1 + \dfrac{7}{10^2} + \dfrac{7}{10^4} + \dfrac{7}{10^6} + \ldots = 1 + \dfrac{\dfrac{7}{10^2}}{1-\dfrac{1}{10^2}} = \dfrac{106}{99}$

248 Tìm các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ $\qquad$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos^2 2x}$.

Hướng dẫn

a) $\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{2\cos^2 x.2\sin^2 x} = \dfrac{1}{4}$.

249 Dùng định nghĩa tìm đạo hàm của hàm số f(x) = xsinx.

Hướng dẫn

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + x\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} + \sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x\right]$$

$$= x\cos x + \sin x.$$

250 Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 6}$.

Hướng dẫn

$$f(x) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right]$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{5}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§ 1. Các phép dời hình trong mặt phẳng

1. Phép đối xứng trục

a) Định nghĩa

Phép đối xứng trục d, kí hiệu $Đ_d$ *là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' xác định sao cho* $\overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$

trong đó M_0 *là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d hay nói gọn hơn là đoạn thẳng MM' nhận đường thẳng d làm đường trung trực.*

b) Tính chất

Định lí. *Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm.*

Hệ quả.

1 *Phép đối xứng trục bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên đường thẳng.*

2 *Phép đối xứng trục biến :*

- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.*
- *Đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.*

c) Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu $H = Đ_d(H)$

2. Phép đối xứng tâm

a) Định nghĩa

Phép đối xứng tâm I, kí hiệu $Đ_I$ *là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho* $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

hay đơn giản hơn, đoạn thẳng MM' nhận I làm trung điểm.

b) *Tính chất*

Định lí. *Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

Hệ quả.

1. *Phép đối xứng tâm bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm.*
2. *Phép đối xứng tâm :*

- *Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó.*
- *Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.*
- *Biến một đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.*

c) *Tâm đối xứng của một hình*

Điểm I là tâm đối xứng của hình H nếu $H = Đ_I(H)$.

3. Phép tịnh tiến

a) *Định nghĩa*

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, *kí hiệu* $T_{\vec{v}}$, *là phép biến hình biến mọi điểm M thành điểm M' xác định, sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

b) *Tính chất*

Định lí. *Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

Hệ quả.

1. *Phép tịnh tiến bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm.*
2. *Phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}$:

- *Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.*
- *Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.*
- *Biến một đường tròn thành một đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.*

4. Phép quay

a) *Định nghĩa*

Cho một điểm cố định I và một góc lượng giác α. *Phép quay tâm I, góc* α, *kí hiệu* Q_I^{α} *hoặc* $Q(I; \alpha)$ *là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' xác định sao cho*

$$\begin{cases} IM' = IM \\ \widehat{(\overline{IM}, \overline{IM'})} = \alpha \end{cases}$$

b) Tính chất

Định lí. *Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm.*

Hệ quả.

1. Phép quay bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm.

2. Phép quay biến :

- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.*
- *Biến đường tròn thành đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho.*

BÀI TẬP

251 Cho đường thẳng d và hai điểm A, M nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Gọi A' là ảnh của A qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

a) Chứng minh đoạn thẳng A'M cắt d.

b) Chứng minh MA < MA'.

Hướng dẫn

d là trung trực của đoạn thẳng AA'. Sử dụng tính chất của đường trung trực và bất đẳng thức tam giác.

252 Cho tam giác ABC, kẻ tia Cx phân giác ngoài của góc C và lấy trên Cx một điểm M. Chứng minh : MA + MB > CA + CB.

Hướng dẫn

Lấy $A' = Đ_{Cx}(A) \Rightarrow A' \in BC$. Dễ thấy MA = MA', CA = CA'. Sử dụng bất đẳng thức tam giác vào tam giác A'BM.

253 Cho hình thang ABCD, đáy lớn CD. Chứng minh :

$$\widehat{BCD} < \widehat{ADC} \Rightarrow AC > BD.$$

Hướng dẫn

Xét phép đối xứng trục là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

254 Cho góc nhọn xOy và một điểm M thuộc miền trong của góc ấy.

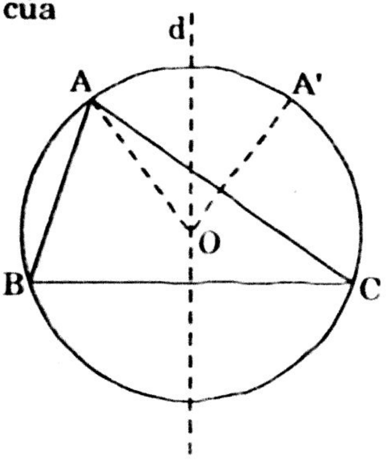
$$M_1 = Đ_{Ox}(M); \qquad M_2 = Đ_{Oy}(M)$$

Chứng minh M_1 và M_2 đối xứng với nhau trong phép đối xứng mà trục đi qua đỉnh O.

Hướng dẫn

Tam giác OM_1M_2 cân tại O.

255 Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi A' là ảnh của A trong phép đối xứng trục là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Chứng minh $A' \in (O)$.



Hướng dẫn

Trục đối xứng d đi qua điểm O.

Ta có $A' = \text{Đ}_d(A)$

$O = \text{Đ}_d(O)$

$\Rightarrow OA' = \text{Đ}_d(OA)$

$\Rightarrow OA' = OA$

$\Rightarrow A' \in (O)$.

256 Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC có chứa điểm A, kẻ các tia Bx, Cy sao cho $\widehat{BCy} = \widehat{CBx}$. Tia Bx và By cắt đường thẳng chứa tia phân giác ngoài của góc A theo thứ tự tại H, K; BK và CH cắt nhau tại điểm I.

a) So sánh các tam giác ABH và ACK.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AI là trục đối xứng của hình vẽ.

Hướng dẫn

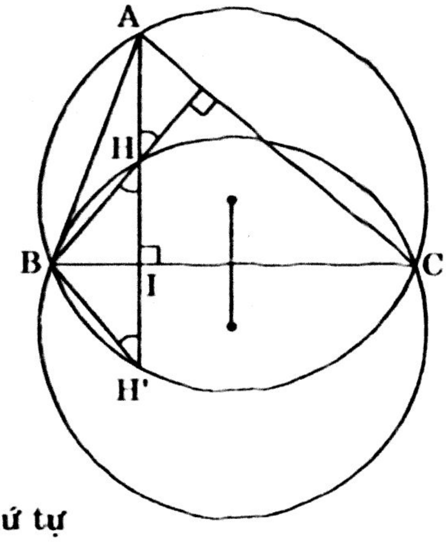
Độc giả tự giải.

257 Cho tam giác ABC, trực tâm H.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là ảnh của nhau trong phép đối xứng trục là đường thẳng BC.

b) Suy ra rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC và HCA bằng nhau.

Hướng dẫn



a) AH cắt BC ở I và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại H'.

Dễ thấy $\widehat{BHI} = \widehat{BH'I} \Rightarrow \Delta HBH'$ cân

$\Rightarrow IH = IH' \Rightarrow H' = \text{Đ}_{BC}(H)$

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp $\Delta H'BC$ (cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

b) Các đường tròn (HAB), (HBC), HCA) theo thứ tự là ảnh của đường tròn (ABC) trong các phép đối xứng trục AB, BC, CA.

258 Cho hai đường tròn (O) và (O') và một đường thẳng Δ. Tìm trên Δ một điểm M sao cho các tiếp tuyến kẻ từ M đến hai đường tròn tạo thành một góc nhận Δ làm phân giác.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

259 Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A. Một điểm M trên cạnh BC, kẻ $MH \perp AB$ và $MK \perp AC$.

a) $A' = \text{Đ}_{BC}(A)$, xác định hình dạng của tứ giác ABA'C.

b) $H' = \text{Đ}_{BC}(H)$. Chứng minh :
+ $H' \in BA'$
+ $MH' \perp A'B$
+ Ba điểm M, H', K thẳng hàng.

c) Kẻ từ B đường vuông góc BB' với AC. Chứng minh $BB' = MH + MK$.

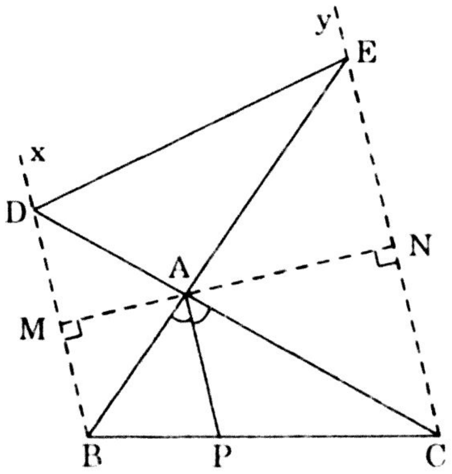
Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

260 Qua các đỉnh B, C của tam giác ABC, ta kẻ các đường thẳng Bx, Cy cùng song song với phân giác trong của góc A; Bx cắt AC tại E và Cy cắt đường thẳng BA tại D.

a) Chứng minh BC và ED đối xứng với nhau trong một phép đối xứng trục có trục đi qua đỉnh A mà ta cần xác định.

b) Chứng minh BC = ED.



Hướng dẫn

a) Gọi M là trung điểm của BD và N là trung điểm của AE.

Dễ thấy BC và DE đối xứng nhau qua MN (Chú ý : ba điểm M, A, N thẳng hàng).

b) $BC = \text{Đ}_{MN}(DE) \Rightarrow BC = DE$.

261 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A, kẻ đường cao AH. Gọi M, N theo thứ tự là ảnh của H trong các phép đối xứng trục AB, AC :

$$M = \text{Đ}_{AB}(H);\quad N = \text{Đ}_{AC}(H).\quad \text{Chứng minh}\quad M = \text{Đ}_{A}(N).$$

Hướng dẫn

Chứng minh A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

262 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và D, E theo thứ tự là ảnh của M qua các phép đối xứng tâm N, P. Xác định phép biến hình biến D thành E.

Hướng dẫn

$E = Đ_A(D)$.

263 Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và $D = Đ_A(B)$; $E = Đ_A(C)$.

a) DE và BC song song với nhau hay cắt nhau ?

b) BE và CD song song với nhau hay cắt nhau ?

Hướng dẫn

a) DE // BC; **b)** BE // DC.

264 Cho tam giác ABC; A' là trung điểm của cạnh BC.

a) Dựng các điểm M, N với $M = Đ_{A'}(B)$; $N = Đ_{A'}(C)$.

b) Dựng ảnh D của A và ảnh của đoạn thẳng AB trong phép đối xứng $Đ_{A'}$.

c) Chứng tỏ AC // BD.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

265 Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và D, E theo thứ tự là ảnh của A' trong các phép đối xứng tâm B' và C'.

a) Tìm ảnh của BC qua phép đối xứng $Đ_{C'}$. Chứng minh ba điểm D, E, A thẳng hàng.

b) Xác định ảnh của đoạn thẳng AA' trong các phép đối xứng $Đ_{B'}$ và $Đ_{C'}$; suy ra CD // BE.

c) Chứng minh D và E đối xứng với nhau trong một phép đối xứng tâm mà ta cần xác định tâm đối xứng.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

266 Cho hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm O; M là một điểm bất kì trong mặt phẳng; M_1 là ảnh của M trong phép đối xứng trục d_1, M_2 là ảnh của M trong phép đối xứng trục d_2.

Chứng minh M_1 và M_2 là ảnh của nhau trong phép đối xứng tâm O.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

267 Cho tam giác ABC.

a. Dựng các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC qua các phép đối xứng tâm A; B; C.

b. Chứng minh : $A_1B_2 // C_1C_2$; $B_1B_2 // C_1A_2$ và $A_1A_2 // B_1C_2$.

c. Chứng minh hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

268 Cho tam giác ABC; G là trọng tâm của tam giác; D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Biết $A' = \text{Đ}_D(G)$; $B' = \text{Đ}_E(G)$ và $C' = \text{Đ}_F(G)$.

Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng với nhau qua trọng tâm G.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

269 Cho hai điểm A, B và điểm M không thẳng hàng với hai điểm A, B.

a. Dựng các điểm N, P, N', P' với $N = \text{Đ}_A(M)$; $P = \text{Đ}_B(M)$;
$N' = \text{Đ}_B(M)$; $P' = \text{Đ}_A(N')$.

b. Chứng minh rằng P và P' là ảnh của nhau trong phép đối xứng tâm M.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

270 Cho góc xOy và một điểm M thuộc miền trong của góc. Hãy dựng qua M đường thẳng Δ, cắt Ox ở P và Oy ở Q sao cho đoạn thẳng PQ nhận M làm trung điểm.

Hướng dẫn

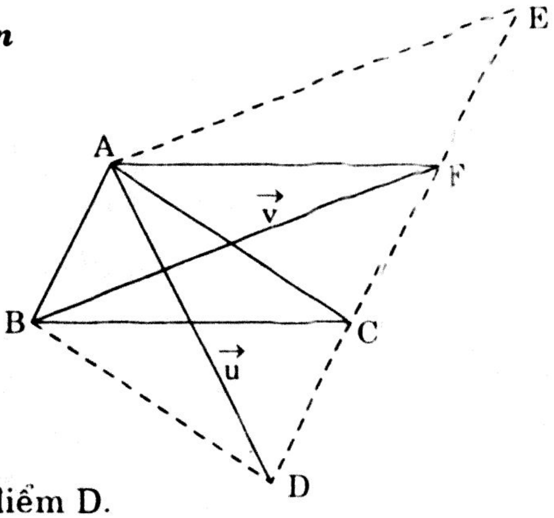
Độc giả tự giải.

271 Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng ta xét hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}$.

a. Chứng minh rằng các vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trong mặt phẳng.

b. Dựng điểm D, ảnh của điểm A trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và dựng điểm E, ảnh của điểm A trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Hướng dẫn



a) Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$

$\Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Tương tự, ta có

$\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

b) Dựng hình bình hành ABDC ta được điểm D.

Dựng hình bình hành BAEC ta được điểm F thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{BF} = \vec{v}$

Sau đó dựng hình bình hành BAEF ta được $E = T_{\vec{v}}(A)$.

272 Cho tam giác ABC; M là trung điểm của cạnh AC. Trên tia BM ta lấy điểm D sao cho MD = BM. Xác định phép biến hình :

a) Biến điểm A thành điểm D. **b)** Biến điểm C thành điểm D.

Hướng dẫn

a) $D = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$ **b)** $D = T_{\overrightarrow{BA}}(C)$.

273 Cho tam giác ABC và điểm D bất kì.

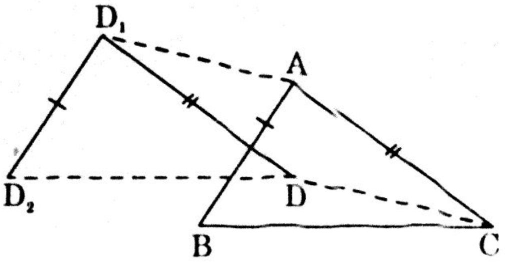
a) Xác định điểm D_1, ảnh của D trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CA}$.

b) Xác định điểm D_2, ảnh của D_1 trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Tìm ảnh của các điểm B, C trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD_1}$.

Có thể nói gì về các tam giác ABC và DD_1D_2 và về các đường thẳng BC và D_2D.

Hướng dẫn



a) Độc giả tự giải.

b) Độc giả tự giải.

c) Ta có $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BD_2} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \Delta D_1D_2D$ là ảnh của tam giác ABC trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD} \Rightarrow$ đpcm.

274 Cho hình bình hành ABCD tâm O và I là một điểm thuộc cạnh AD; J là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{IA}$.

a) Chứng minh rằng J là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{ID}$.

b) Chứng minh OI = OJ.

c) Chứng minh rằng C là ảnh của I trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AJ}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{ID}$.

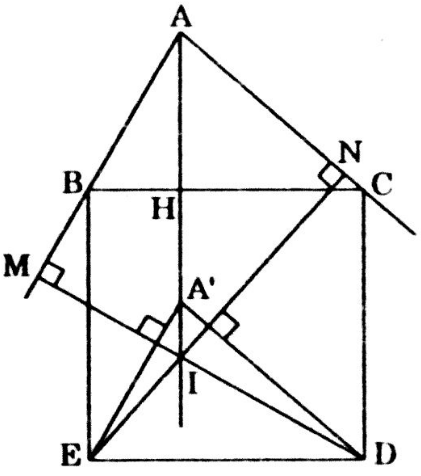
b) Suy ra tứ giác AICJ là hình bình hành.

c) Tứ giác AICJ là hình bình hành cho ta $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AJ} \Rightarrow C = T_{\overrightarrow{AJ}}(I)$.

275 Cho tam giác ABC. Dựng hình vuông BCDE nằm trong nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC, không chứa điểm A. Kẻ DM ⊥ AB (M ∈ AB); EN ⊥ AC (N ∈ AC).

Chứng minh rằng DM và EN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC.

Hướng dẫn



Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BE}}$

$$A' = T_{\overrightarrow{BE}}(A)$$

Gọi I là giao điểm của DM, EN

$\Rightarrow$ EI ⊥ A'D; DI ⊥ A'E

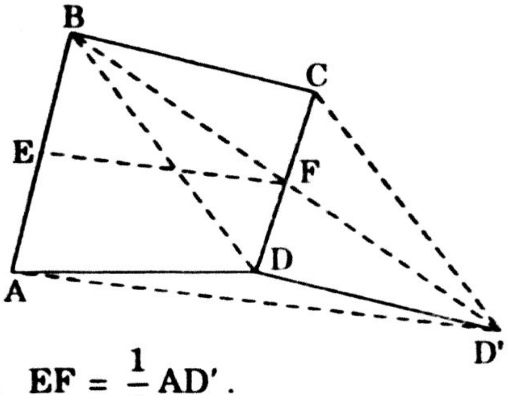
$\Rightarrow$ I là trực tâm của $\Delta A'ED$

$\Rightarrow$ AI ⊥ ED $\Rightarrow$ AI ⊥ BC

$\Rightarrow$ I ∈ AH.

276 **Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng nối các trung điểm của các cạnh đối diện của một tứ giác lồi bằng một nửa tổng của hai cạnh còn lại thì tứ giác đó là một hình thang.**

Hướng dẫn



Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$, ta có $D' = T_{\overrightarrow{BC}}(D)$.

Tứ giác BCD'D là hình bình hành cho ta DD' = BC.

Và điểm F là trung điểm của BD'. Suy ra $EF = \dfrac{1}{2}AD'$.

Trong $\Delta ADD'$, theo bất đẳng thức tam giác : $AD' \le AD + DD'$

$$\Rightarrow \quad 2EF \le AD + BC.$$

Dấu = xảy ra khi ba điểm A, D, A' thẳng hàng, tức là khi AD // BC

$$\Rightarrow \quad ABCD \text{ là hình thang.}$$

277 Trong hình bình hành ABCD lấy điểm P sao cho $\widehat{PAB} = \widehat{PCB}$. Chứng minh $\widehat{PBA} = \widehat{PDA}$.

Hướng dẫn

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$

$$Q = T_{\overrightarrow{AD}}(D)$$

Kết luận được suy ra từ việc tứ giác ADQP là tứ giác nội tiếp.

278 Cho tam giác ABC; I là trung điểm của cạnh BC. D, E, F theo thứ tự là ảnh của điểm A trong các phép đối xứng tâm B, C, I.

a) Chứng minh rằng trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ thì

$$D = T_{\overrightarrow{AB}}(B) \text{ và } F = T_{\overrightarrow{AB}}(C).$$

b) Tìm ảnh của các điểm B, C trong phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC}}$.

c) Chứng minh rằng : $F = T_{\overrightarrow{BC}}(D)$; $\quad E = T_{\overrightarrow{BC}}(F)$.

d) Chứng minh rằng các điểm $M = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$; $N = \text{Đ}_I(D)$ và $P = \text{Đ}_C(F)$ là ba điểm trùng nhau.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

279 Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và hai điểm A, B. Tìm trên d_1 một điểm D và trên d_2 một điểm C sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

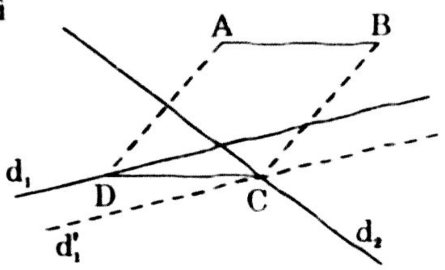
Hướng dẫn

Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$, thì

$$d_1' = T_{\overrightarrow{AB}}(d_1)$$

và $\quad C = d_2 \cap d_1'$.

Từ đây suy ra điểm D.



280 Cho hình bình hành ABCD, hai đỉnh A, B cố định. Tìm quỹ tích đỉnh C trong các trường hợp :

a) Đỉnh D di chuyển trên một đường thẳng d cho trước.

b) Đỉnh D di chuyển trên một đường tròn tâm A, bán kính R.

Hướng dẫn

Ta có $C = T_{\overrightarrow{AB}}(D)$

a) Quỹ tích của C là đường thẳng d' // d.

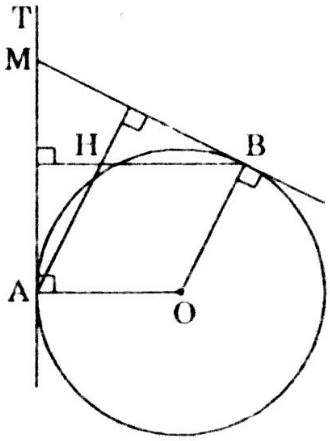
b) Quỹ tích của C là đường tròn (B; R).

281 Cho đường tròn tâm O và điểm A cố định thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AT với đường tròn. Một điểm M chuyển động trên AT; từ M kẻ tiếp tuyến thứ hai MB đến đường tròn. Tìm quỹ tích của :

a) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB.

b) Trực tâm H của tam giác MAB.

Hướng dẫn



a) Tứ giác OAMB nội tiếp. Tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔMAB cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác OAMB.

$$IO = IA$$

Quỹ tích I là đường trung trực của đoạn thẳng AO.

b) Tứ giác OAHB là hình bình hành

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA}$$

H là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$. Khi M chạy trên tiếp tuyến AM thì B chạy trên đường tròn (O), suy ra quỹ tích của H là ảnh của đường tròn (O) trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$ (đó là đường tròn tâm A, bán kính bằng bán kính của đường tròn (O)).

282 Cho hai đường thẳng song song d và d'. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Gọi $M_1 = Đ_d(M)$ và $M_2 = Đ_{d'}(M_1)$. H và K theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng M_1M_2 với d và d'.

a) Chứng minh ba điểm M, M_1, M_2 thẳng hàng.

b) So sánh hai vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{HK}$. Có thể kết luận gì về phép biến hình f biến M_1 thành M_2.

Hướng dẫn

a) Độc giả tự giải.

b) Khi thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục có trục song song, ta được kết quả là một phép tịnh tiến.

283 Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác, ta dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Chứng minh BG = CE và BG ⊥ CE.

Hướng dẫn

Thực hiện phép quay tâm A, góc quay 90^0, chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ : $B \to E$ và $G \to C$.

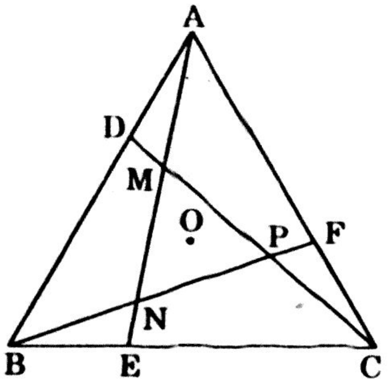
284 Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự, lấy các điểm D, E, F sao cho : $AD = \frac{1}{3}AB$; $BE = \frac{1}{3}BC$; $CF = \frac{1}{3}CA$.

Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm của AE và CD; AE và BF; CD và BF.

Chứng minh rằng tam giác MNP đều.

Hướng dẫn

Thực hiện phép quay Q, tâm O; góc quay 120^0, theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ, ta có



$A \to B$; $D \to E$

$B \to C$; $E \to F$

$C \to A$; $F \to D$

$\Rightarrow$ $AE \to BF$; $BF \to CD$; $CD \to AE$

$M \to N$; $N \to P$; $P \to M$

Suy ra đpcm.

285 Cho hình vuông ABCD và một số thực k, k > 0; M và N là hai điểm thỏa mãn : $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = k.\overrightarrow{BC}$.

Chứng minh : DM = AN và DM ⊥ AN.

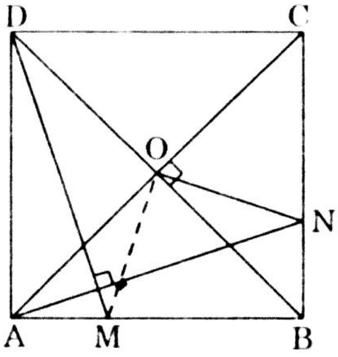
Hướng dẫn

Thực hiện phép quay tâm O, góc quay 90^0 :

$D \to A$

$M \to N$

$DM \to AN$



Suy ra đpcm.

Chú ý : có thể sử dụng công cụ vectơ :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$$

Từ đây ta suy ra $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM} = 0 \quad \Rightarrow \quad AN \perp DM$.

286 Cho đường thẳng Δ và ba điểm A, B, C theo thứ tự ấy thuộc Δ. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng Δ, ta vẽ các tam giác đều ADB, BEC. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AE, CD. Chứng minh :

a) AE = CD. **b)** Tam giác BIJ đều.

Hướng dẫn

Thực hiện phép quay tâm B, góc quay 60^0.

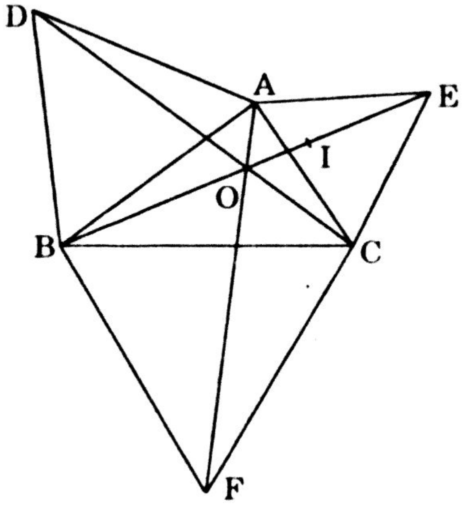
287 Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác, ta dựng các tam giác đều ABD; ACE và BCF. Chứng minh :

a) AF = BE = CD.

b) Các đường thẳng AF, BE, CD đồng quy tại một điểm O.

c) Nếu ABC là tam giác nhọn thì OE = OA + OC.

Hướng dẫn



a) Thực hiện phép quay tâm C, góc quay 60^0, chiều ngược với chiều kim đồng hồ.

$A \to E; \qquad F \to B$

$\Rightarrow \quad AF = BE.$

Tương tự ta có AF = CD.

Suy ra đpcm.

Kết quả này cũng cho ta góc giữa AF và BE bằng 60^0.

b) Gọi giao điểm của AF và BE là O.

Trên tia OE, lấy điểm I sao cho OI = AO.

Thực hiện phép quay tâm A, góc quay 60^0 ta có :

$$E \to C; \qquad I \to O \quad \text{và} \quad B \to D$$

Vì E, I, B thẳng hàng nên C, O, D thẳng hàng hay CD đi qua O đồng thời ta cũng có IO = CO.

c) O là điểm nhìn ba cạnh AB, BC, CA của tam giác dưới một góc 120^0 nên nếu ABC là tam giác nhọn thì điểm O thuộc miền trong tam giác, lúc đó điểm I nằm giữa hai điểm O, E cho ta $\quad OE = OI + IE$

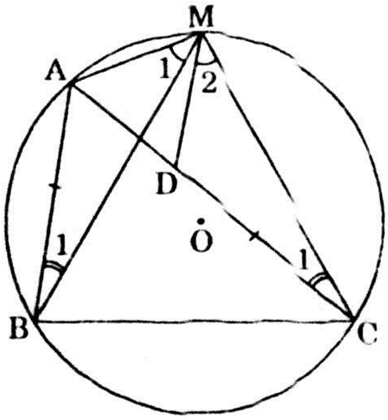
$$\Rightarrow \quad OE = OA + CO.$$

288 Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cạnh BC cố định, và đỉnh A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$, trên cạnh CA ta lấy một điểm D sao cho CD = BA.

a) Chứng minh D là ảnh của A trong một phép quay mà ta cần xác định.

b) Suy ra quỹ tích điểm D khi A di chuyển.

Hướng dẫn



a) Gọi M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$.

Ta có $\qquad \hat{B}_1 = \hat{C}_1$

$$\Delta AMB = \Delta DMC$$

$$\Rightarrow \quad MA = MD \qquad (1)$$

Ta lại có $\qquad \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

$$\Rightarrow \quad \widehat{AMD} = \widehat{BMC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra D là ảnh của A trong phép quay tâm M góc quay $\widehat{BMC}$.

b) Quỹ tích D là ảnh của cung $\overset{\frown}{BMC}$ trong phép quay tâm M, góc quay $\widehat{BMC}$.

§2. Phép vị tự và phép đồng dạng

1. Phép vị tự

a) Định nghĩa

Phép vị tự tâm I, tỉ số k, kí hiệu là V_I^k *là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' xác định sao cho* $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

I là tâm vị tự, k là tỉ số vị tự.

Chú ý : – *Khi $k = 1$ ta có* ***phép đồng nhất***

– *Khi $k = -1$ ta được phép đối xứng tâm I : $Đ_I$.*

b) Tính chất

Định lí. *Phép vị tự tỉ số k biến $M \to M'$; $N \to N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Hệ quả.

1. *Phép vị tự tỉ số k biến $M \to M'$; $N \to N'$ thì hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{M'N'}$ cùng phương và $|\overrightarrow{M'N'}| = |k||\overrightarrow{MN}|$.*
2. *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng A, B, C với B nằm giữa A, C thành ba điểm thẳng hàng A', B', C' với B' nằm giữa A', C'.*
3. *Phép vị tự tỉ số k :*

- *Biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó theo tỉ số $|k|$.*
- *Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính R' với*

$$R' = |k|R.$$

2 Phép đồng dạng

a) Định nghĩa

Phép đồng dạng theo tỉ số k là phép biến hình sao cho với hai điểm M, N bất kì và ảnh của chúng theo thứ tự là M', N', ta luôn có :

$$M'N' = k.MN, \ k > 0.$$

b) Tính chất

- *Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của các điểm trên đường thẳng.*
- *Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Phép đồng dạng tỉ số k biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó theo tỉ số k.*
- *Phép đồng dạng tỉ số k biến một đường tròn thành một đường tròn với sự liên hệ của các bán kính $R' = kR$.*

BÀI TẬP

289 Cho ba điểm thẳng hàng K, A, A'. Xét phép vị tự V, tâm K, biến điểm A thành A'.

a) B là một điểm không thẳng hàng với A và A'. Chứng minh rằng điểm B', ảnh của B trong phép vị tự V là giao điểm của đường thẳng KB với đường thẳng song song với AB, kẻ qua A'. Dựng điểm B'.

b) Cho C là một điểm khác điểm K, thẳng hàng với A và A'. Dựng ảnh của điểm C qua phép vị tự V.

Hướng dẫn

Sử dụng định nghĩa phép vị tự và định lí Thalès.

290 Cho hình bình hành ABCD. Ta gọi A' = Đ_A (B); B' = Đ_{AC} (B) và C' = Đ_C (B).

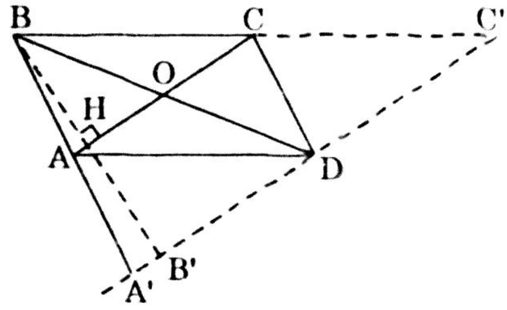
Chứng minh bốn điểm A', B', D, C' thẳng hàng.

Hướng dẫn

Ta thấy D = Đ_O (B).

Cả bốn điểm A', B', D, C' theo thứ tự là ảnh của các điểm A, H, O, C trong phép vị tự V (B; 2), tâm B, tỉ số k = 2 mà các điểm A, H, O, C thẳng hàng.

Suy ra đpcm.



291 Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB tại M và cắt cạnh AC tại N. Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và AMN tiếp xúc với nhau.

Hướng dẫn

Xét phép vị tự V, tâm A, tỉ số $\frac{AM}{AB}$ biến tam giác ABC thành tam giác AMN.

292 Cho tam giác ABC, trọng tâm G; A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Xác định tâm và tỉ số vị tự của phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

b) Chứng minh tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trực tâm của tam giác A'B'C'.

c) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

Hướng dẫn

a) Phép vị tự $V\left(G; -\frac{1}{2}\right)$ với G là trọng tâm của tam giác ABC biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

b) và **c)** Độc giả tự giải.

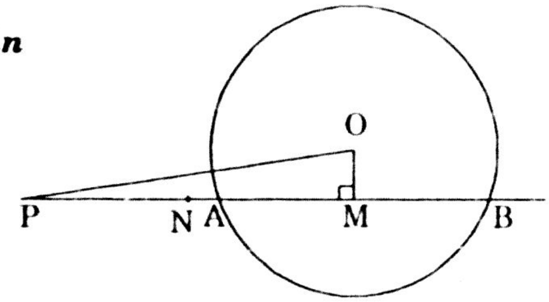
293 Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm ngoài đường tròn. Một cát tuyến qua P cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Tìm quỹ tích :

a) Trung điểm M của đoạn thẳng AB.

b) Trung điểm N của đoạn thẳng PM.

c) Trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn



a) M nhìn đoạn OP dưới góc 90^0

$\widehat{OMP} = 90^0$.

b) Ta có $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PM}$

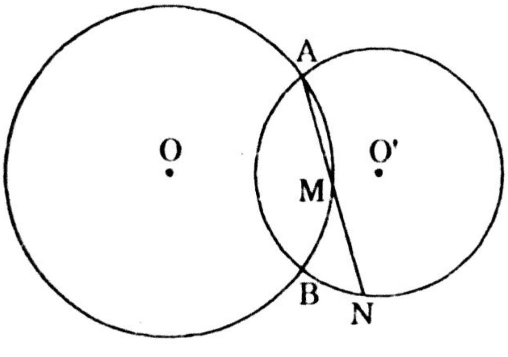
N là ảnh của M trong phép vị tự tâm P, tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

c) Ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$

G là ảnh của M trong phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

294 Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt đường tròn (O) ở M và cắt đường tròn (O') tại N sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AN.

Hướng dẫn



Chú ý : Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

M là ảnh của N trong phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Điểm N nằm trên (O') nên điểm M nằm trên đường tròn (O'_1), ảnh của đường tròn (O') trong phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Do đó M là giao điểm của hai đường tròn (O) và (O'_1).

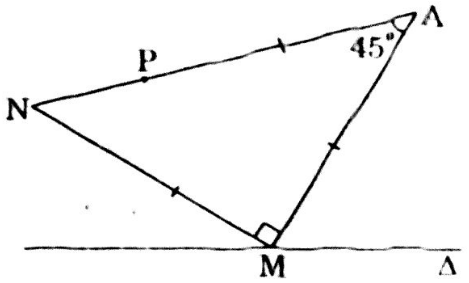
295 Cho đường thẳng cố định Δ và một điểm A cố định không thuộc Δ. Ứng với mỗi điểm M thuộc Δ, ta dựng tam giác AMN vuông cân tại đỉnh M. Gọi P là điểm thuộc đoạn thẳng AN sao cho AP = AM.

a) Tìm quỹ tích điểm P; **b)** Tìm quỹ tích điểm N.

Hướng dẫn

a) Do AP = AM và $\widehat{PAM} = 45^0$ ⇒ P là ảnh của M trong phép quay tâm A, góc quay 45^0.

Quỹ tích của P là đường thẳng Δ', ảnh của đường thẳng Δ trong phép quay tâm A, góc quay 45^0.



b) Do $AN = AP\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{AN}{AP} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AM} = \sqrt{2}.$$

N là ảnh của M trong phép đồng dạng tâm A, tỉ số $k = \sqrt{2}$ và góc $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = 45^0$.

Quỹ tích của N là đường thẳng Δ", ảnh của Δ trong phép đồng dạng tâm A, tỉ số $\sqrt{2}$, góc 45^0.

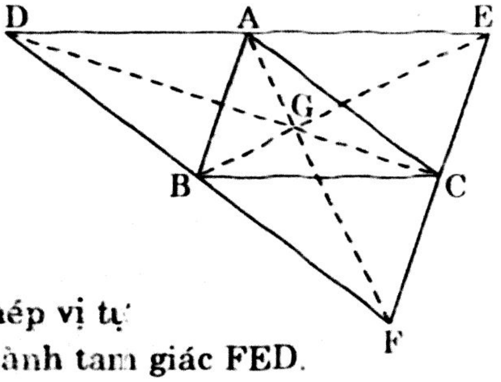
ÔN TẬP CHƯƠNG I

296 Cho tam giác ABC. Qua các đỉnh A, B, C ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh đối diện, các đường thẳng này đôi một cắt nhau tại các điểm D, E, F.

a) Xác định các phép biến hình biến điểm D thành điểm E.

b) Xác định phép biến hình biến tam giác ABC thành tam giác FED.

Hướng dẫn



a) Phép đối xứng tâm A

$$E = Đ_A(D)$$

hoặc phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{BC}$

$$E = T_{2\overrightarrow{BC}}(D)$$

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -2$ biến tam giác ABC thành tam giác FED.

$$\Delta FED = V_G^{-2}(ABC).$$

297 Cho ba điểm A, B, M không thẳng hàng.

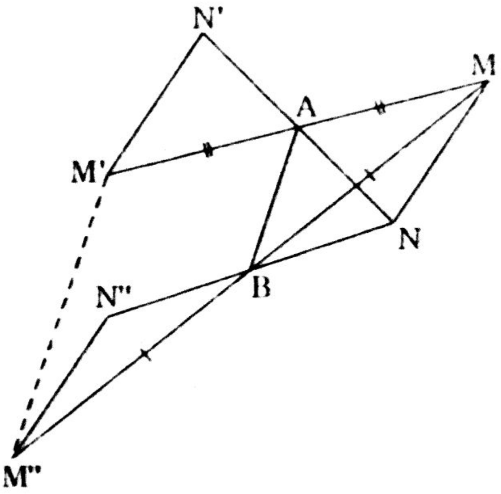
Dựng điểm M', ảnh của M trong phép đối xứng tâm A;

M", ảnh của M trong phép đối xứng tâm B.

a) Chứng minh M'M" // AB, suy ra rằng ta có thể suy ra điểm M" từ điểm M' bằng một phép dời hình.

b) Cho N là một điểm không thẳng hàng với A, B. Dựng điểm N', ảnh của N trong phép đối xứng tâm A; N", ảnh của N trong phép đối xứng tâm B.

Có thể nói gì về các đường thẳng MN; M'N'; M''N'' và các đoạn thẳng MN; M'N'; M''N''.



Hướng dẫn

a) $M'' = T_{2\,AB}(M')$.

b) MN // M'N' // M''N''

MN = M'N' = M''N''

298 Cho tam giác ABC.

Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC, có chứa điểm A, ta dựng các tam giác đều BMC, APC và ANB. Chứng minh :

a) CN = BP.

b) Gọi I, J là trung điểm của BP, CN. Chứng minh ΔAIJ là tam giác đều.

c) Tứ giác APMN là hình bình hành.

Hướng dẫn

Lấy chiều quay là chiều ngược với chiều kim đồng hồ.

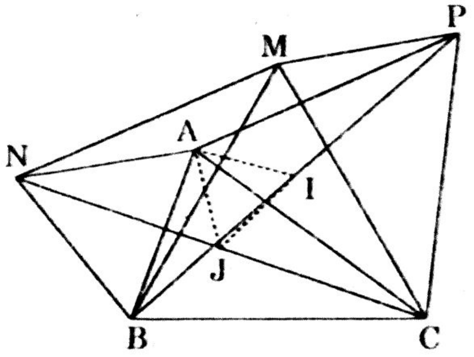
a) Thực hiện phép quay tâm A, góc quay 60^0 thì

$N \Rightarrow B$

$C \Rightarrow P$

$\Rightarrow \quad NC = Q_A^{60^0}(BP)$

$\Rightarrow \quad NC = BP$.



b) Ta có $\quad I = Q_A^{60^0}(J)$

$\Rightarrow \quad AI = AJ$ và $(\widehat{AI, AJ}) = 60^0$

$\Rightarrow \quad \Delta AIJ$ đều.

c) Thực hiện phép quay tâm B, góc quay 60^0 theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ thì $C \to M$; $\quad A \to N$

Cho ta AC = MN và AC = AP nên $\quad$ NM = AP $\quad$ (1)

Chứng minh tương tự, ta có $\quad$ PM = AN $\quad$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

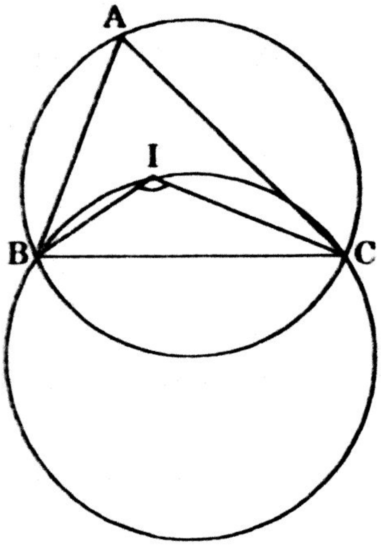
299 Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định và đỉnh A chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tìm quỹ tích :

a) Tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác.

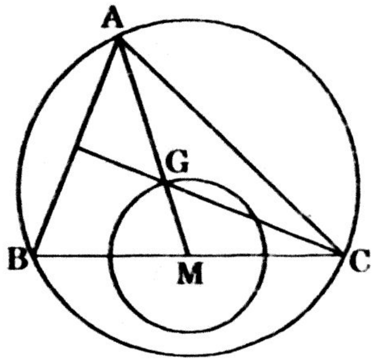
b) Trọng tâm G của tam giác.

c) Trực tâm H của tam giác.

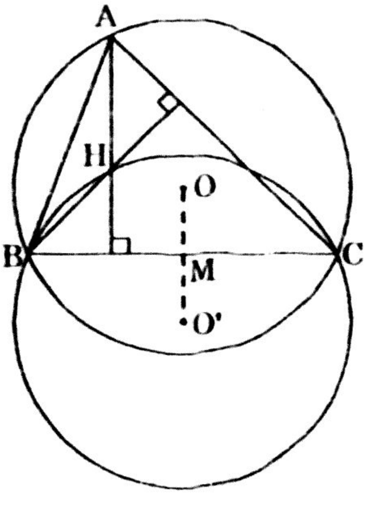
Hướng dẫn



a)



b)



c)

a) Quỹ tích I là đường tròn chứa cung chứa góc $90^0 + \frac{A}{2}$ trên đoạn BC.

b) Gọi M là trung điểm của BC thì $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$

⇒ G là ảnh của A trong phép vị tự tâm M, tỉ số $k = \frac{1}{3}$

$$G = V_M^{\frac{1}{3}}(A)$$

⇒ Quỹ tích G là đường tròn ảnh của đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong phép vị tự tâm là trung điểm M của BC và tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

c) Quỹ tích trực tâm H là :

Đường tròn ảnh của đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong phép $Đ_{BC}$.

hoặc : Đường tròn ảnh của đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong phép $Đ_M$.

hoặc : Đường tròn ảnh của đường tròn ngoại tiếp ΔABC trong phép $T_{\overrightarrow{OM}}$, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

300 Cho tam giác ABC, trực tâm H. Gọi (O_1); (O_2); (O_3) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB; HBC và HCA.

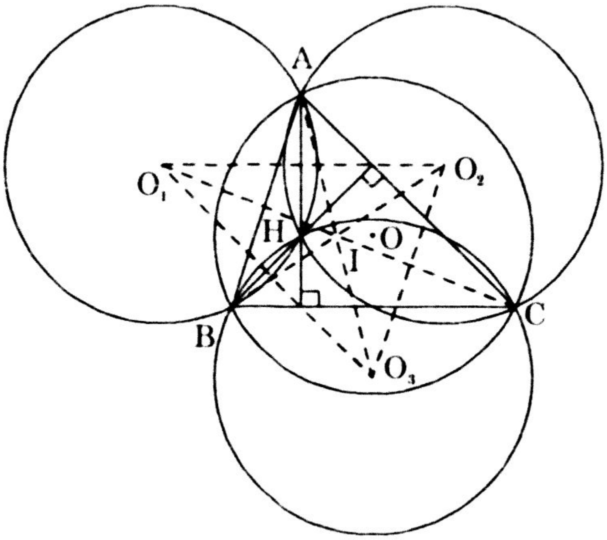
a) Xác định các phép tịnh tiến biến $(O_1) \to (O_3)$

$(O_3) \to (O_2)$

$(O_2) \to (O_1)$

b) Xác định phép vị tự biến ΔABC thành $\Delta O_1O_2O_3$.

Hướng dẫn



a) Dễ thấy O và O_1 đối xứng nhau qua AB

O và O_2 đối xứng nhau qua AC.

Ta có $O_1O_3 = AC$ hay $\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{AC}$

Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC}}$ biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_3).

b) Tứ giác BCO_3O_1 là hình bình hành nên BO_3 cắt CO_1 tại trung điểm I của chúng. ABO_2O_3 cũng là hình bình hành, suy ra AO_2 cũng đi qua O.

Phép vị tự tâm I, tỉ số $k = -1$ biến tam giác ABC thành tam giác $O_1O_2O_3$.

$$\Delta O_1O_2O_3 = V_I^{-1}(\Delta ABC)$$

(Phép vị tự này cũng là phép đối xứng tâm I).

Chương II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

1. Mặt phẳng

a) *Mặt phẳng :* *Mặt phẳng là một khái niệm cơ bản, không định nghĩa.*

Mặt phẳng thường được kí hiệu, chẳng hạn mp (P) hoặc đơn giản hơn : (P).

b) Điểm thuộc mặt phẳng, đường thẳng thuộc mặt phẳng

– *Điểm A thuộc mặt phẳng (P) được kí hiệu :*

$$A \in mp\,(P) \text{ hoặc } A \in (P)$$

Trong trường hợp này, ta còn nói ***điểm A nằm trong mp (P)*** *hoặc* ***điểm A nằm trên mp (P)****, hoặc* ***mp (P) chứa điểm A*** *hoặc* ***mp (P) đi qua điểm A.***

– *Điểm A không thuộc mp (P) được kí hiệu :*

$$A \notin mp\,(P) \text{ hoặc } A \notin (P)$$

– *Đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) được kí hiệu :*

$$a \subset (P) \text{ hoặc } (P) \supset a$$

Ta cũng nói đường thẳng a ***nằm trên (nằm trong)*** *mp (P) hoặc đường thẳng a* ***chứa trong*** *mp (P) hoặc mp (P)* ***chứa*** *đường thẳng a.*

– *Đường thẳng a không thuộc mp (P) được kí hiệu :*

$$a \not\subset (P) \text{ hoặc } (P) \not\supset a.$$

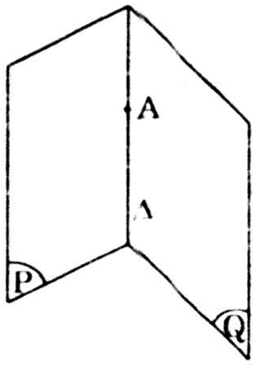
2. Các tính chất thừa nhận

a) Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

b) Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.



c) Tính chất 3

Tồn tại 4 điểm không cùng nằm trong một mặt phẳng (không đồng phẳng).

d) Tính chất 4

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng.

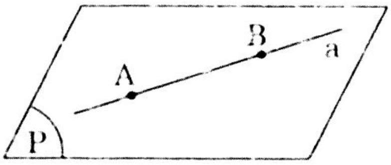
*e) **Tính chất 5***

Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3. Một số kết quả

Từ các tính chất thừa nhận trên, ta chứng minh được định lí sau :

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.



Có thể phát biểu định lí này một cách rõ ràng hơn :

Nếu một đường thẳng có hai điểm nằm trên một mặt phẳng thì nó nằm trọn trong mặt phẳng ấy.

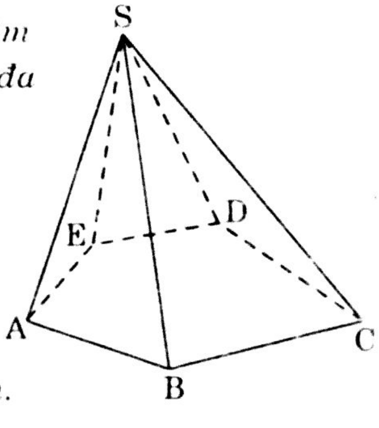
4. Điều kiện xác định mặt phẳng

a) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

b) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.

c) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

5. Hình chóp và hình tứ diện



Cho một đa giác phẳng và một điểm S không nằm trên mặt phẳng đa giác. Nối S với các đỉnh của đa giác, ta được một hình không gian có :

- *1 mặt là một đa giác*
- *Các mặt còn lại là các tam giác có chung đỉnh S.*

*Một hình như vậy, ta gọi là **hình chóp**. Điểm S được gọi là **đỉnh**, mặt đa giác được gọi là **đáy**, các mặt tam giác là các mặt bên.*

Hình chóp được gọi tên theo đa giác đáy.

*Hình chóp tam giác còn gọi là hình tứ diện. Hình tứ diện có 4 tam giác, đặc biệt hình tứ diện có 4 tam giác đều được gọi là **tứ diện đều**.*

6. Một số chú ý

- *Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt, ta phải tìm được 2 điểm chung phân biệt của chúng.*
- *Muốn chứng minh các điểm thẳng hàng, ta chứng tỏ rằng chúng là những điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt.*

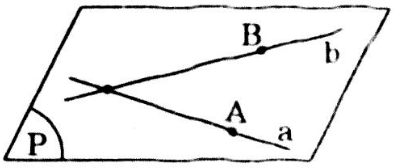
BÀI TẬP

301 Chứng tỏ rằng hai đường thẳng phân biệt giao nhau xác định một mặt phẳng duy nhất.

Hướng dẫn

Giả sử có hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm O.

Trên đường thẳng a lấy một điểm A (khác O) và trên đường thẳng b lấy một điểm B (khác O). Theo tính chất thừa nhận 2, ba điểm không thẳng hàng O, A, B xác định suy nhất một mặt phẳng (P). Theo định lí ta có :



(P) chứa hai điểm O, A của đường thẳng a nên $(P) \supset a$.

(P) chứa hai điểm O, B của đường thẳng b nên $(P) \supset b$.

Vậy mp (P) chứa hai đường thẳng giao nhau a, b.

Theo tính chất 2, (P) là duy nhất.

302 Chứng minh rằng nếu một đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (P) tại một điểm A thì A là điểm duy nhất.

Hướng dẫn

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử a còn cắt (P) tại điểm thứ hai A'. Như vậy đường thẳng a đi qua hai điểm A, A' thuộc mp (P), theo định lí, a phải nằm trong (P). Điều này trái với giả thiết a không nằm trong (P).

Vậy A là điểm duy nhất.

303 Cho một đường thẳng a và một điểm A không nằm trên a. Chứng minh rằng mọi đường thẳng Δ đi qua A và cắt đường thẳng a thì nằm trong cùng một mặt phẳng.

Hướng dẫn

$\Delta \subset (A, a)$.

304 Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm O. Một đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng a và b. Có thể nói gì về vị trí của đường thẳng Δ đối với mặt phẳng (P) xác định bởi hai đường thẳng a và b ?

Hướng dẫn

- Nếu Δ không đi qua O thì $\Delta \subset (P)$ (ba đường thẳng a, b, Δ đồng phẳng).
- Nếu Δ đi qua O thì Δ có thể không nằm trong mặt phẳng (P) và 3 đường thẳng a, b, Δ có thể không đồng phẳng.

305 Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba đường thẳng phân biệt đôi một cắt nhau thì hoặc là chúng đồng phẳng hoặc là chúng đồng quy.

Hướng dẫn

Giả sử $A = a \cap b$; $B = b \cap c$ và $C = c \cap a$.

Ta xét hai khả năng :

- Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt. Dễ thấy ba điểm A, B, C không thẳng hàng vì nếu ba điểm này thẳng hàng thì ba đường thẳng a, b, c trùng nhau (trái với giả thiết a, b, c là ba đường phân biệt), do đó ba điểm A, B, C xác định một mặt phẳng (P). Rõ ràng cả ba đường thẳng a, b, c đều thuộc mp (P) hay a, b, c đồng phẳng.
- Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau; chẳng hạn A trùng với B. Trong trường hợp này nếu C khác A thì theo tính chất 2, ta suy ra hai đường thẳng c và a trùng nhau, trái với giả thiết a và c là hai đường thẳng phân biệt. Vậy C phải trùng với A hay ba điểm A, B, C trùng nhau và ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

306 Cho hai đường thẳng a và b không cùng nằm trong một mặt phẳng và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy tìm đường thẳng Δ qua M và cắt cả a và b.

Hướng dẫn

Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (M; a) và (M; b).

307 Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một không cùng nằm trong một mặt phẳng. Tìm đường thẳng Δ cắt cả ba đường thẳng đã cho.

Hướng dẫn

Lấy trên a một điểm A; đường thẳng Δ cần tìm là giao tuyến của hai mp (A; b) và (A; c).

308 Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Cứ qua 3 điểm không thẳng hàng thì có một mặt phẳng. Vậy có tất cả bao nhiêu mặt phẳng được xác định ?

Hướng dẫn

Ta có các trường hợp :

	Vị trí các điểm	Số mp
1	Cả 4 điểm thẳng hàng	vô số mp
2	Có 3 trong bốn điểm thẳng hàng hoặc cả 4 điểm đồng phẳng	1
3	Không có 3 điểm nào thẳng hàng	4

Chú ý :

1. Trường hợp 3, ta có 4 mp : (ABC); (ABD); (ACD) và (BCD).
2. Có thể mở rộng bài toán trong trường hợp có n điểm không đồng phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

309 Hai mặt phẳng (P) và (Q) giao nhau theo giao tuyến Δ. Một đường thẳng $a \subset (P)$ và đường thẳng $b \subset (Q)$. Chứng minh rằng nếu a và b cắt nhau tại điểm A thì $A \in \Delta$.

Hướng dẫn

Ta có : $A \in a$ và $a \subset (P) \Rightarrow A \in (P)$ (1)

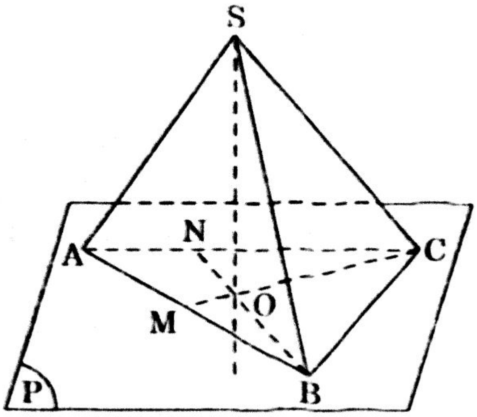
$A \in b$ và $b \subset (Q) \Rightarrow A \in (Q)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A là điểm chung của hai mp (P) và mp (Q).

Vậy $A \in \Delta$.

310 Cho tam giác ABC nằm trong mp (P) và một điểm S không nằm trong mp (P); M và N là hai điểm theo thứ tự lấy trên các cạnh AB, AC. Tìm giao tuyến của hai mp (SBN) và (SCM).

Hướng dẫn



Gọi O là giao điểm của BN và CM.

$O \in BN$ mà $BN \subset (SBN)$ nên $O \in (SBN)$.

$O \in CM$ mà $CM \subset (SCM)$ nên $O \in (SCM)$.

Vậy O là một điểm chung của hai mp (SBN) và (SCM).

Dễ thấy S là một điểm chung của hai mp (SBN) và (SCM).

Vậy SO là giao tuyến cần tìm.

311 Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác ABCD không phải là hình thang và một điểm S không thuộc mặt phẳng (P).

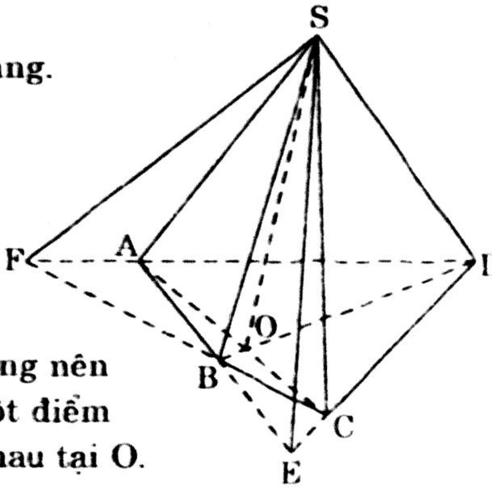
Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng.

a) (SAB) và (SCD).

b) (SBC) và (SAD).

c) (SAC) và (SDB).

Hướng dẫn



Vì tứ giác ABCD không phải là hình thang nên các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại một điểm E, DA, CB cắt nhau tại F, AC, BD cắt nhau tại O.

Ta có ngay : **a)** $(SAB) \cap (SCD) = SE$; **b)** $(SBC) \cap (SAD) = SF$;

c) $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

312 Trong mặt phẳng (P) cho góc nhọn xOy. Một đường thẳng Δ cắt (P) tại điểm I (khác điểm O) và một điểm M bất kì thuộc đường thẳng Δ.

a) Xác định giao tuyến của hai mp (O; Δ) và mp (P).

b) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên Δ thì đường thẳng OM luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Đường thẳng OI.

b) OM là giao tuyến của hai mp (M; Ox) và (M; Oy); OM luôn nằm trong mp (O; Δ).

313 Cho bốn tia Ox, Oy, Oz, Ot không có ba tia nào đồng phẳng. Một mặt phẳng (P) cắt các tia ấy theo thứ tự tại các điểm A, B, C, D.

a) Xác định giao tuyến của mp (P) với các mặt phẳng (Ox; Oy); (Oy; Oz); (Oz; Ot) và (Ot; Ox).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (Ox; Oz) và (Oy; Ot).

Hướng dẫn

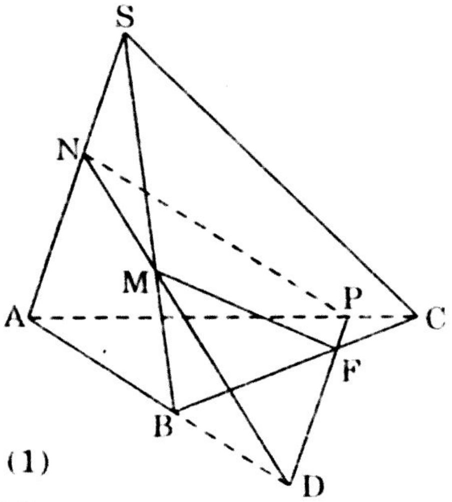
a) Đó là các đường thẳng theo thứ tự AB, BC, CD, DA.

b) Gọi giao điểm của AC và BD là M, ta có : $(Ox; Oz) \cap (Oy; Ot) = OM$.

314 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC và một điểm S không nằm trên (P). Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm lấy trên các đoạn thẳng SB, SA, AC. Giả sử MN và BA không song song. Xác định các giao tuyến của mp (MNP) với các mặt phẳng :

a) (SAB) **b)** (ABC) **c)** (SBC).

Hướng dẫn



a) Dễ thấy $MN = (MNP) \cap (SAB)$.

b) Vì MN và AB không song song với nhau nên chúng cắt nhau tại một điểm D;

$D \in MN$ và $MN \subset (MNP) \Rightarrow D \in (MNP)$.

$D \in AB$ và $AB \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC)$.

Vậy D là điểm chung của (MNP) và (ABC) (1)

Ta cũng có $P \in (MNP)$; $P \in AC$ mà $AC \subset (ABC)$

$\Rightarrow P \in (ABC)$, cho ta P là điểm chung của (MNP) và (ABC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra DF = (MNP) ∩ (ABC).

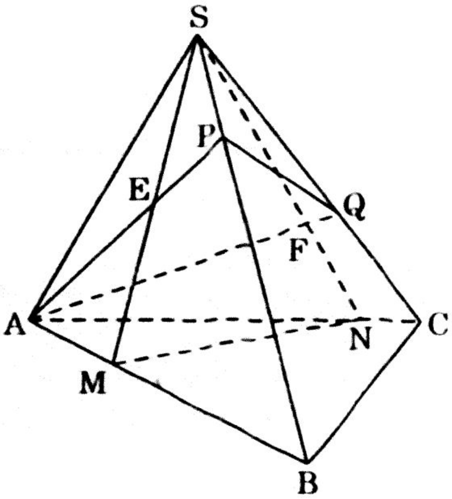
c) Gọi F là giao điểm của DP và BC (vì cùng nằm trong mp (ABC)). Dễ thấy F là một điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (SBC). Điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng này chính là điểm M. Vậy

MF = (MNP) ∩ (SBC).

315 Cho tứ diện SABC; E, F theo thứ tự là các điểm thuộc miền trong của các tam giác SAB; SAC. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SEF) và (ABC)

b) (EAF) và (SBC).



Hướng dẫn

a) Gọi M là giao điểm của SE và AB

N là giao điểm của SF và AC

⇒ MN = (SEF) ∩ (ABC).

b) Gọi P là giao điểm của AE và SB

Q là giao điểm của AF và SC

⇒ PQ = (EAF) ∩ (SBC).

316 Cho tam giác đều ABC và một điểm D nằm ngoài mp (ABC). Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng mặt phẳng xác định bởi ba điểm D, B, O đi qua trung điểm của cạnh AC.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

317 Cho tứ diện ABCD. Gọi BM, CN, DP là các đường trung tuyến của tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABM); (ACN) và (ADP) cắt nhau theo một giao tuyến.

b) Xét bài toán với trường hợp các đường cao của tam giác đáy BCD.

Hướng dẫn

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Ba mặt phẳng (ABM), (ACN) và (ADP) đều chứa đường thẳng AG.

b) Chú ý : Ba đường cao của một tam giác đồng quy tại trực tâm.

318 Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm lấy trên các cạnh SA, SB, SC. Biết các cặp đường thẳng sau đây là các đường thẳng không song song với nhau :

MN và AB; NP và BC; PM và CA.

a) Tìm giao điểm E của đường thẳng MN với mp (ABC), giao điểm F của NP với mp (ABC) và giao điểm K của MP với mp (ABC).

b) Chứng minh ba điểm E, F, K thẳng hàng.

Hướng dẫn

a) $E = MN \cap AB$; $F = NP \cap BC$; $K = PM \cap CA$.

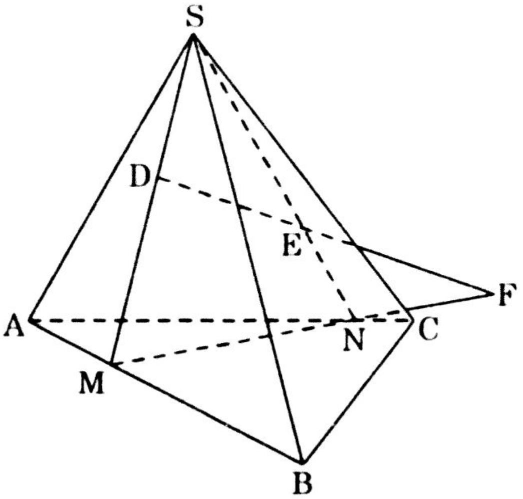
b) E, F, I nằm trên giao tuyến của hai mp (MNP) và (ABC).

319 Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi D, E là hai điểm theo thứ tự thuộc miền trong của các tam giác SAB, SAC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng DE với mp (ABC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BC với mp (ADE).

Hướng dẫn



a) Gọi $M = SD \cap AB$

$N = SE \cap AC$

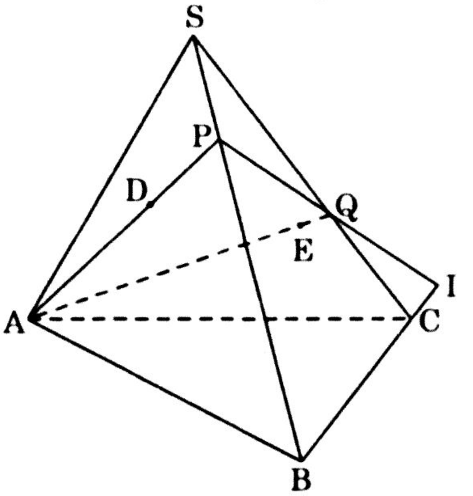
Trong mp (SDE), hai đường thẳng DE và MN giao nhau tại điểm F.

$F \in DE$.

$F \in MN$ và $MN \subset (ABC)$

$\Rightarrow$ $F \in (ABC)$

Vậy $F = DE \cap (ABC)$.



b) Gọi $P = AD \cap SB$

$Q = AE \cap SC$

Trong mp (SBC) hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại I.

Dễ dàng chứng minh được :

$I = BC \cap (ADE)$.

320 Cho hình chóp S.ABC. Trên các cạnh SA, SB ta lấy các điểm M, N sao cho SM = 2MA và SN = 3NB. Xác định giao điểm của đường thẳng MN với mp (ABC).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

321 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trong mặt phẳng (P) có một điểm B và trong mặt phẳng (Q) có một đường thẳng a.

a) Xác định giao điểm A của đường thẳng a và mp (P).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (B; a) và (P).

Hướng dẫn

a) $A = a \cap \Delta$ **b)** $(P) \cap (B; a) = AB$.

322 Cho tứ giác ABCD; E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD; F là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC; S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (ABCD).

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

(SAB) và (SCD); (SAD) và (SBC); (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SE với một mp (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại các điểm A', B', C', D'.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

323 Cho hình chóp S.ABCD và một điểm M trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mp (SBD).

b) N là một điểm thuộc cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD và mp (AMN).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

324 Hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là một tứ giác lồi, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại một điểm P; M là một điểm di động trên cạnh SB.

a) Xác định giao điểm N của đường thẳng SC với mp (SMP).

b) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

c) Chứng minh khi M di chuyển trên SB thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn

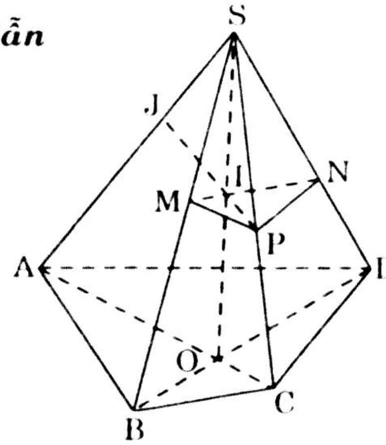
Độc giả tự giải.

325 Cho tứ giác ABCD nằm trong mp (P) và một điểm S nằm ngoài mp (P). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD. Trên các cạnh SB, SD và trên cạnh SC ta lấy lần lượt ba điểm M, N, P.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SO với mp (MNP).

b) Tìm giao điểm của cạnh SA với mp (MNP).

Hướng dẫn



a) Gọi $I = MN \cap SO$

$\Rightarrow$ $I = SO \cap (MNP)$.

b) Gọi $J = PI \cap SA$

$\Rightarrow$ $J = SA \cap (MNP)$.

326 Trong mặt phẳng (P) cho một góc xOy; M, N là hai điểm cố định không thuộc mp (P) và (Q) là một mặt phẳng thay đổi luôn chứa hai điểm M, N. Mặt phẳng (Q) cắt Ox ở A và cắt Oy ở B. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi mp (Q) thay đổi.

b) Gọi C là giao điểm của AN và BM. Chứng minh khi (Q) thay đổi thì C luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

a) Gọi I là giao điểm của MN với mp (P); AB luôn đi qua I.

b) C chạy trên OI.

327 Cho bốn tia Ox, Oy, Oz, Ot không có ba tia nào đồng phẳng.

Mặt phẳng (P) cắt Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự tại các điểm A, B, C, D.

Mặt phẳng (P') cắt Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự tại các điểm A', B', C', D'.

Gọi I là giao điểm của AC và BD; I' là giao điểm của A'C' và B'D'.

Chứng minh ba điểm O, I, I' là ba điểm thẳng hàng.

Hướng dẫn

O, I, I' là các điểm chung của hai mặt phẳng (Ox; Oy) và (Oy; Ot).

328 Hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ; A và B là hai điểm thuộc mp (P); đường thẳng AB cắt Δ tại điểm C và S là một điểm nằm ngoài (P) và (Q). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của SA, SB với mp (Q).

Chứng minh ba điểm C, E, F thẳng hàng.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

329 Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác ABCD; E là giao điểm của AB và CD, F là giao điểm của AC và BD. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD nối các điểm A, B, C, D với một điểm S không nằm trên mp (P), ta lấy theo thứ tự, các điểm M, N, P, Q. Gọi I là giao điểm của AM và DN; J là giao điểm của BQ và CP.

a) Chứng minh các điểm S, E, I, J thẳng hàng.

b) AN và DM cắt nhau tại K; BP và CQ cắt nhau tại H. Chứng minh các điểm S, F, K, H thẳng hàng.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

330 Cho tứ diện ABCD; I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của đoạn thẳng CD với mp (IJK).

Chứng minh DE = DC.

b) Tìm giao điểm F của đoạn thẳng AD với mp (IJK).

Chứng minh FA = 2FD.

c) Chứng minh FK = IJ.

d) M là điểm thuộc AB và N là điểm thuộc CD. Tìm giao điểm của MN với mp (IJK).

Hướng dẫn

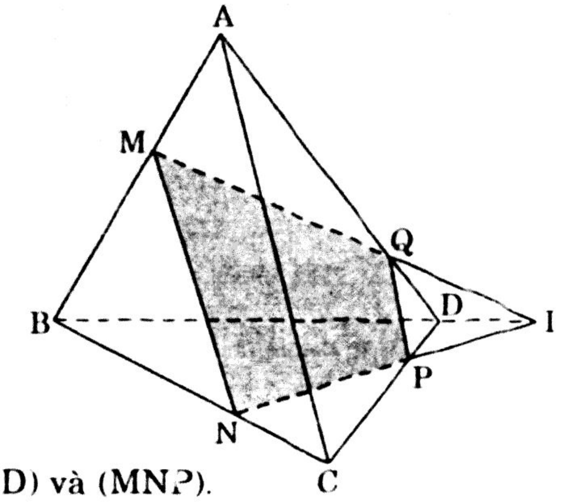
Độc giả tự giải.

331 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P là các điểm theo thứ tự lấy trên các cạnh AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của mp (MNP) và mp (ABD).

b) Tìm thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (MNP).

Hướng dẫn



a) Trong mp (BCD) đường thẳng BD và đường thẳng NP cắt nhau tại điểm I.

$I \in BD \Rightarrow I \in (ABD)$

$I \in NP \Rightarrow I \in (MNP)$

Vậy I là điểm chung của hai mp (ABD) và (MNP).

Mặt khác M cũng là điểm chung của hai mp (ABD), (MNP).

Vậy MI là giao tuyến của hai mp (ABD) và (MNP).

b) Trong mp (ABD), MI cắt AD tại điểm Q.

Như vậy ta thấy, mặt phẳng (MNP) :

- Cắt mặt bên ABC theo đoạn thẳng MN.
- Cắt mặt đáy BCD theo đoạn thẳng NP.
- Cắt mặt bên ABD theo đoạn thẳng MQ.
- Cắt mặt bên ACD theo đoạn thẳng PQ.

Tứ giác MNPQ là thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mp (MNP).

332 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, Q, P theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh SA, BC, CD.

a) Tìm giao điểm N của cạnh SD với mp (MQP).

b) Tìm thiết diện hình chóp khi cắt bởi mp (MQP).

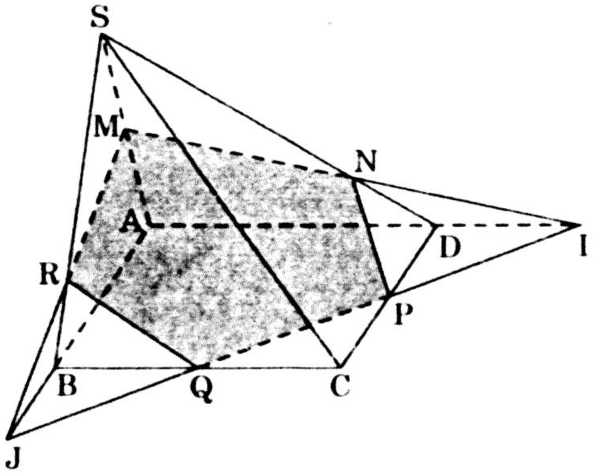
Hướng dẫn

a) Trong mp (ABCD); PQ và AD cắt nhau tại điểm I.

$I \in PQ \Rightarrow I \in (MQP)$

$I \in AD \Rightarrow I \in (SAD)$

Trong mp (SAD) thì MI và SD cắt nhau tại N; N chính là giao điểm của SD với mp (MQP).



b) Tương tự như trên, trong mp (ABCD), PQ cắt AB tại điểm J. Trong mp (SAB), MJ cắt SB tại điểm R. Từ đây ta có :

Mặt phẳng (MQP) cắt :

- Đáy ABCD theo đoạn thẳng QP.
- Mặt bên SCD theo đoạn thẳng PN.
- Mặt bên SAD theo đoạn thẳng NM.
- Mặt bên SAB theo đoạn thẳng MR.
- Mặt bên SBC theo đoạn thẳng RQ.

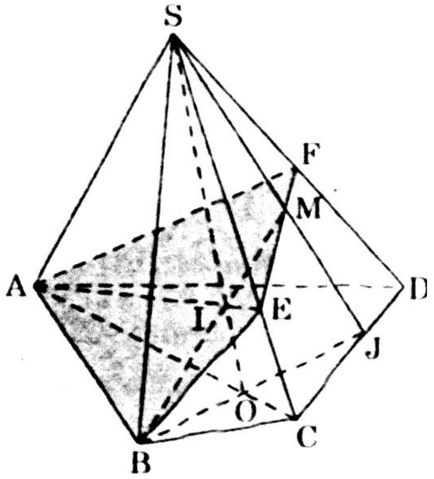
Hình ngũ giác MNPQR là thiết diện hình chóp khi cắt bởi mp (MQP).

333 Cho tứ giác ABCD và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABCD); M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBM).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp (SAC).

c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).



Hướng dẫn

a) Trong mp (SCD), SM cắt CD tại điểm J.

Dễ thấy J $\in$ (SBM).

$\Rightarrow$ BJ $\subset$ (SBM)

Trong mp (ABCD); BJ và AC cắt nhau tại điểm O.

O $\in$ BJ $\Rightarrow$ O $\in$ (SBM)

O $\in$ AC $\Rightarrow$ O $\in$ (SAC)

$\Rightarrow$ O là điểm chung của hai mp (SAC) và (SBM).

Mặt khác S là một điểm chung của hai mặt phẳng này. Vậy SO là giao tuyến của hai mp (SAC) và (SBM).

b) Trong mp (SBM); BM và SO giao nhau tại điểm I.

SO $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ I $\in$ (SAC)

I $\in$ BM

$\Rightarrow$ I là giao điểm của BM với mp (SAC).

c) Trong mp (SAC), AI cắt SC tại E. Dễ thấy E $\in$ mp (ABM).

Trong mp (SCD), EM cắt SD tại F. Dễ thấy F $\in$ mp (ABM).

Từ đây, ta có mp (ABM) cắt các mặt bên của hình chóp :

- Cắt mặt bên SBC theo đoạn thẳng BE.
- Cắt mặt bên SCD theo đoạn thẳng EF.
- Cắt mặt bên SDA theo đoạn thẳng FA.

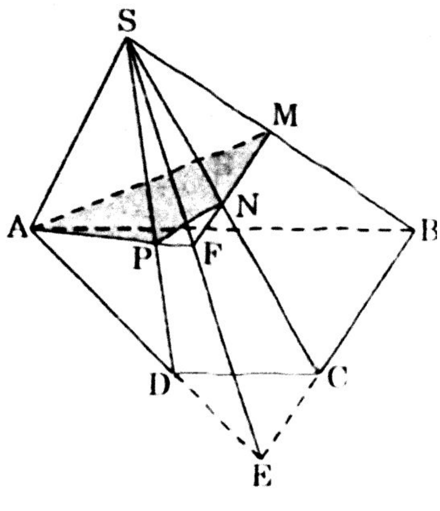
Tứ giác ABEF là thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).

334 Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB // CD và AB > CD); M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mp (SAD) và mp (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mp (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (AMN).



Hướng dẫn

a) Gọi E là giao điểm của AD và BC.

SE là giao tuyến cần tìm.

b) Trong mp (SBC), MN cắt SE tại điểm F.

Trong mp (SAE), AF cắt SD tại P; P là giao điểm của SD với (AMN).

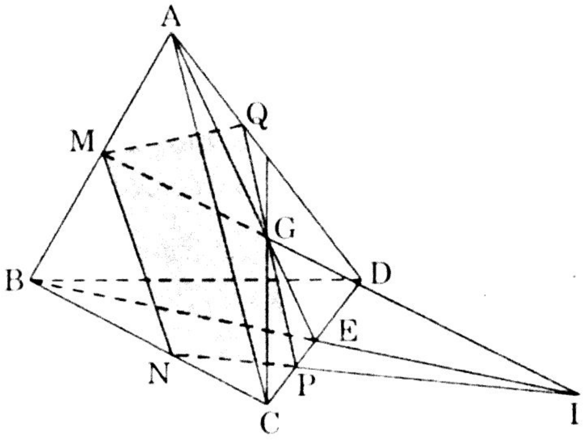
c) Thiết diện cần tìm là tứ giác AMNP.

335 Cho tứ diện ABCD; M là trung điểm của cạnh AB và G là trọng tâm của tam giác ACD.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng MG với mp (BCD).

b) N là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt tứ diện bởi mp (MGN).

Hướng dẫn



a) Gọi E là trung điểm của CD.

$\Rightarrow \quad G \in AE$.

Trong mp (ABE)

$\Rightarrow \quad$ MG cắt BE tại I.

Như vậy $\quad I = MG \cap (BCD)$.

b) Gọi $\quad P = IN \cap CD$

$Q = PG \cap AD$.

Tứ giác MNPQ là thiết diện cần tìm.

§2. Quan hệ song song

1. Đường thẳng song song với đường thẳng

a) Định nghĩa

- *Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng.*
- *Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.*

b) Các tính chất

Tính chất 1. *Trong không gian, qua một điểm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.*

Tính chất 2. *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Định lí. *(về giao tuyến của ba mặt phẳng)*

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả. *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).*

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

a) Định nghĩa

Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

b) Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lí 1. *Nếu đường thẳng a song song với một đường thẳng b nào đó nằm trên một mặt phẳng (P) không chứa a thì a song song với mp (P).*

Định lí 2. *Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng.*

Hệ quả 1. *Nếu đường thẳng a song song với một mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt (P) theo giao tuyến song song với a.*

Hệ quả 2. *Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.*

3. Hai mặt phẳng song song

a) Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là song song khi chúng không có điểm chung.

b) Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lí. *Nếu một mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

c) Tính chất

Tính chất 1. *Qua một điểm ngoài một mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*

Hệ quả 1. *Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với mp (Q).*

Hệ quả 2. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tính chất 2. *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*

d) Định lí Ta-let trong không gian

Định lí thuận.

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Định lí đảo.

Giả sử trên hai đường thẳng a *và* a' *lần lượt lấy hai bộ điểm* (A, B, C) *và* (A', B', C') *sao cho* $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$.

Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' *cùng song song với một mặt phẳng.*

e) Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ

Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác nằm trong hai mặt phẳng song song. Tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.

Hình lăng trụ có :

- *Các cạnh bên bằng nhau.*
- *Các mặt bên là các hình bình hành.*
- *Hai đáy là hai đa giác bằng nhau.*

Định nghĩa hình hộp

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

Hình hộp có sáu mặt đều là hình bình hành, các mặt đối diện thì song song với nhau.

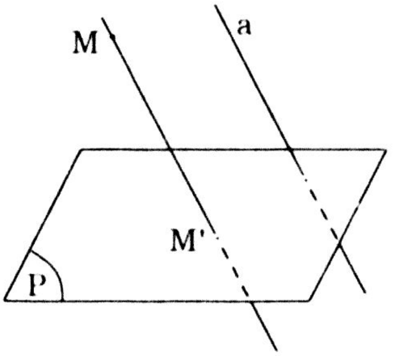
Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

4. Phép chiếu song song

a) Định nghĩa

Trong không gian cho một mặt phẳng (P) *và một đường thẳng* a *cắt* (P).

Với mỗi điểm M *trong không gian, ta dựng qua* M *đường thẳng* Δ *song song với* a *(hoặc trùng với* Δ*); gọi* M' *là giao điểm của* Δ *với* (P). *Phép đặt tương ứng mỗi điểm* M *trong không gian với điểm* M' *của* (P) *như vậy gọi là phép chiếu song song theo phương* a *lên mặt phẳng* (P).



(P) là mặt phẳng chiếu;   a là phương chiếu;
M' là hình chiếu song song của M.

b) ***Tính chất***

Tính chất 1. *Hình chiếu song song của một đường thẳng là mộ đường thẳng.*

Hệ quả. *Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạ thẳng, của một tia là một tia.*

Tính chất 2. *Hình chiếu của hai đường thẳng song song là hai đườn thẳng song song hoặc trùng nhau.*

Tính chất 3. *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của ha đoạn thẳng song song hoặc hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đườn thẳng.*

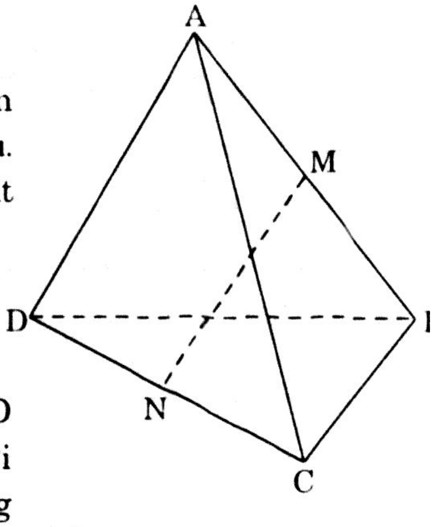
BÀI TẬP

336 Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N theo thứ tự l trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD.

a) Chứng minh các cặp đường thẳng sau đây là các cặp đường thẳn chéo nhau : AB và CD;   BC và AD;   AC và BD.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD và MN và BC là các đường thẳn đôi một chéo nhau.

Hướng dẫn



a) Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng. Giả sử AB và CD không chéo nhau. Như vậy AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P).

$AB \subset (P) \Rightarrow A \in (P)$ và $B \in (P)$ (1)

$CD \subset (P) \Rightarrow C \in (P)$ và $D \in (P)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trong mp (P). Điều này trái với giả thiết là bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Vậy AB và CD chéo nhau.

Các trường hợp còn lại, chứng minh tương tự.

b) Chứng minh như câu a).

337 Cho hai đường thẳng a, b không cùng nằm trên một mặt phẳng. Trê đường thẳng a có hai điểm A, A'. Trên đường thẳng b có hai điểm B, B'.

Chứng minh các cặp đường thẳng sau đây là các cặp đường thẳng chéo nhau : AB và A'B'; A'B và AB'.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

338 Cho mặt phẳng (P), đường thẳng a thuộc (P) và đường thẳng b cắt (P) tại điểm A. Chứng minh rằng nếu A $\notin$ a thì a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

Hướng dẫn

Nếu A $\notin$ a thì a và b nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.

339 Cho tứ diện ABCD. Hỏi các cạnh đối của tứ diện có thể song song với nhau được không ?

Hướng dẫn

Không.

340 Cho hình thang ABCD (AD // BC và AD > BC). Một điểm S nằm ngoài mp (ABCD); I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh AB và SI là hai đường thẳng chéo nhau.

b) M và N là hai điểm phân biệt thuộc đường thẳng SI. Chứng minh các cặp đường thẳng sau là các cặp đường thẳng chéo nhau :

AM và BN; AN và BM.

c) Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác SAB và SCD. Chứng minh các đường thẳng SC và GG' chéo nhau.

Hướng dẫn

Sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng.

341 Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và một đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng ấy. Chứng minh rằng mọi đường thẳng khác đường thẳng c và song song với c thì phải chéo nhau với ít nhất một trong hai đường thẳng a, b.

Hướng dẫn

Sử dụng phương pháp chứng minh bằng phản chứng.

342 Cho bốn đường thẳng đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng ấy thì :

a) Hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Hoặc cùng cắt nhau tại một điểm.

Hướng dẫn

a) Giả sử có 4 đường thẳng phân biệt a, b, c, d đôi một cắt nhau ta có 6 giao điểm; giả sử a cắt b, c, d theo thứ tự tại các điểm A, B, C; b cắt c d tại E, F và c cắt d tại G. Xét mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và điểm E. Rõ ràng (P) chứa đường thẳng b (vì chứa A và E), chứa đường thẳng c (vì chứa C và E) và do đó (P) chứa điểm F (vì chứa b) do vậy (P) chứa B, F, tức là (P) chứa d. Điều này có nghĩa là bốn đường thẳng cùng nằm trong mp (P).

b) Giả sử ba đường thẳng a, b, c đồng quy tại A, rõ ràng d phải đi qua A hay a, b, c, d đồng quy.

343 Cho bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4, trong đó $d_1 // d_2$ và $d_3 // d_4$.

Hãy tìm đường thẳng a cắt cả bốn đường thẳng ấy.

Hướng dẫn

$d_1 // d_2 \Rightarrow$ d_1, d_2 cùng thuộc một mp (P).

$d_3 // d_4 \Rightarrow$ d_3, d_4 cùng thuộc một mp (Q).

$a = (P) \cap (Q)$.

344 Chứng minh rằng nếu ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một và không có điểm nào chung cho cả ba mặt phẳng thì giao tuyến của chúng song song với nhau.

Hướng dẫn

Giả sử có ba mp (P), (Q), (R) và

$$(P) \cap (Q) = d_1; \quad (Q) \cap (R) = d_2; \quad (R) \cap (P) = d_3.$$

Giả sử $d_1 \cap d_2 = M$ thì rõ ràng M là điểm chung cho cả 3 mặt phẳng Điều này trái với giả thiết là ba mặt phẳng không có điểm chung nào.

Vậy $d_1 // d_2$. Tương tự, ta chứng minh được $d_2 // d_3$.

Vậy $d_1 // d_2 // d_3$.

345 Trên các cạnh AC, SC của hình chóp S.ABCD, theo thứ tự lấy các điểm I, K sao cho $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{SK}{SC}$. Mặt phẳng (P) đi qua IK cắt các cạnh AB, AD SD, SB lần lượt tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh MQ // NP.

Hướng dẫn

Chú ý : IK // SA.

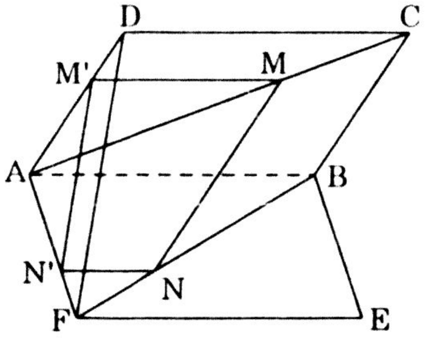
346 Hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên AC lấy một điểm M và trên BF lấy một điểm N sao cho

$\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = k$. Mặt phẳng qua MN và song song với AB cắt cạnh AD tại M' và cắt cạnh AF tại N'.

a) Chứng minh M'N' // DF.

b) Cho $k = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh MN // DE.

Hướng dẫn



a) Dễ thấy MM' // NN' // AB.

Suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} = k$

$\dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} = k$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \quad \Rightarrow \quad M'N' \,//\, DF.$

b) Với $k = \dfrac{1}{3}$ thì M là trọng tâm của ΔABD ⇒ DM đi qua trung điểm I của AB; N là trọng tâm của ΔABE; BN đi qua trung điểm I của AB hay MN và DE cùng thuộc mp (IDE). Từ đây sử dụng định lí Talet trong mặt phẳng ta suy ra đpcm.

347 Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E, F theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh SB, SC. Chứng minh tứ giác ADFE là hình thang.

Hướng dẫn

Hãy chứng minh EF // AB.

348 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành; gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC).

b) Chứng tỏ giao tuyến d nằm trong mặt phẳng (SIJ).

Hướng dẫn

a) d là đường thẳng qua S và song song với AB (hoặc DC).

b) d // IJ và d đi qua S.

349 Cho tứ diện ABCD với AC = AD. Gọi Ax là tia phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ACD; M, N theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh BC và BD.

a) Chứng minh MN // Ax. **b)** Suy ra $Ax \subset (AMN)$.

Hướng dẫn

a) Tam giác ACD cân tại đỉnh A nên Ax // CD.

Dễ thấy CD // MN nên Ax // MN.

b) Suy ra từ câu a).

350 Hai tam giác ABC và A'B'C' nằm trong hai mặt phẳng khác nhau và không có đỉnh chung. Các cặp đường thẳng AB và A'B'; BC và B'C'; CA và C'A' là các cặp đường thẳng giao nhau.

a) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc song song với nhau.

b) Giao điểm của các cặp đường thẳng AB và A'B', BC và B'C', CA và C'A' thẳng hàng.

Hướng dẫn

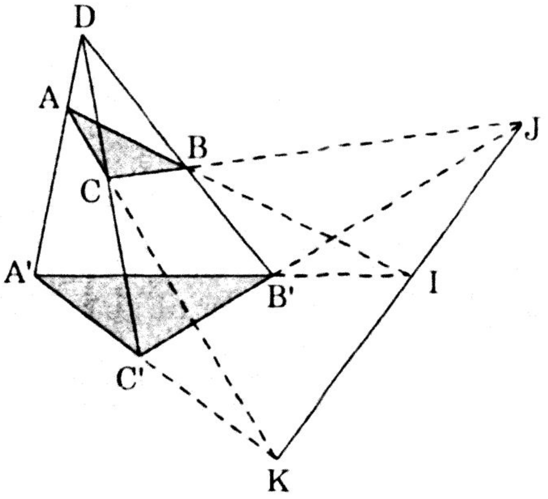
a) Giả sử AA' và BB' cắt nhau tại một điểm D.

$$\left.\begin{array}{l} D \in AA' \quad \Rightarrow \quad D \in (ACC'A') \\ D \in BB' \quad \Rightarrow \quad D \in (CBB'C') \end{array}\right\}$$

⇒ D là điểm chung của hai mp (ACC'A') và (CBB'C')

⇒ D ∈ CC' hay các đường thẳng AA', BB', CC' đi qua D.

Giả sử AA' // BB' thì vì (ACC'A') chứa AA' và (CBB'C') chứa BB' nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là CC' phải song song với AA', BB'.



b) Gọi I = AB ∩ A'B', J = CB ∩ C'B', K = CA ∩ C'A'

⇒ I, J, K là các điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C').

351 Cho tứ diện ABCD. Biết AB = AC = AD. Chứng minh rằng các phân giác ngoài Ax, Ay, Az của các góc BAZ, CAD và DAB đồng phẳng.

Hướng dẫn

Chứng minh chúng cùng song song với mp (BCD). Xem bài 349.

352 Cho hình thang ABCD (AB // CD) và một điểm S ở ngoài mp (ABCD).

a) Chứng minh AB // (SCD).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

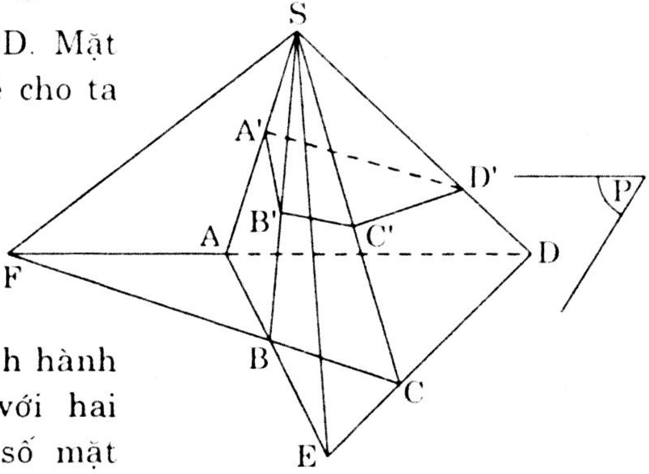
353 Cho hình chóp tứ giác S.ABCD và mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại các điểm A', B', C', D'.

a) Phải chọn mặt phẳng (P) thế nào để ta có A'B' // C'D'.

b) Phải chọn mặt phẳng (P) thế nào để ta có A'D' // B'C'.

c) Chứng tỏ rằng có vô số mặt phẳng (P) cắt hình chóp S.ABCD để tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

Hướng dẫn



a) Gọi E là giao điểm của AB, CD. Mặt phẳng (P) song song với SE sẽ cho ta A'B' // C'D'.

b) Gọi F là giao điểm của AD, BC.

Mặt phẳng (P) song song với SF sẽ cho ta A'D' // B'C'.

c) Để tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành thì mp (P) phải song song với hai đường thẳng SE, SF. Có vô số mặt phẳng như vậy.

354 Cho tứ diện ABCD và một điểm M trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt các cạnh AC, AD và BD theo thứ tự tại các điểm N, P, Q.

a) Tìm điều kiện cho mp (P) để tứ giác MNPQ là hình thang NP // MQ.

b) Tìm điều kiện cho mp (P) để tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Hướng dẫn

a) (P) // CD.

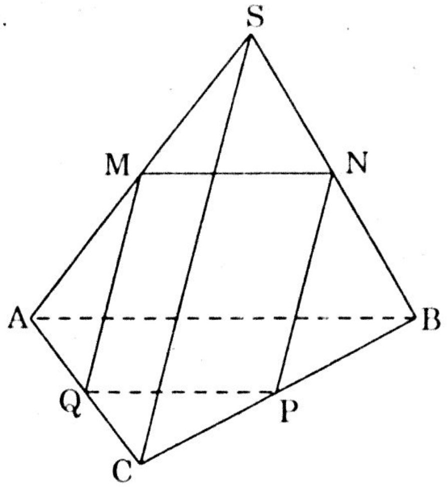
b) (P) // CD và (P) // AB.

355 Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SA, SB và BC.

a) Chứng minh AB // (MNP) và SC // (MNP).

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng AC với mp (MNP) và giao tuyến của mp (MNP) lần lượt với các mp (SAC) và mp (ABC).

c) Tứ giác MNPQ là hình gì ?



Hướng dẫn

a) AB // MN và MN $\subset$ (MNP)

$\Rightarrow$ AB // (MNP).

Tương tự, ta chứng minh được SC // (MNP).

b) Từ P kẻ đường thẳng Δ song song với AB $\Rightarrow$ Δ // MN; Δ cắt AC tại trung điểm Q của AC.

Q $\in$ (MNP) và Q $\in$ AC $\Rightarrow$ Q = AC $\cap$ (MNP).

Dễ thấy PQ = (MNP) $\cap$ (ABC) và MQ = (MNP) $\cap$ (SAC).

c) Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

356 Cho hai hình bình hành không cùng nằm trong một mặt phẳng ABCD và ABEF.

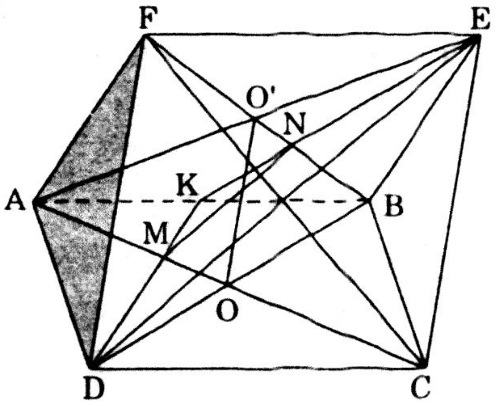
a) Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của ABCD và ABEF.

Chứng minh OO' // (ADF); OO' // (BCE)

b) Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE.

Chứng minh MN // (CEF).

Hướng dẫn



a) Ta có OO' // FD và FD $\subset$ (ADF);

OO' // CE và CE $\subset$ (BCE).

b) Gọi K là trung điểm của AB, ta có

$$\frac{DM}{DK} = \frac{2}{3}; \quad \frac{EN}{EK} = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{DM}{DK} = \frac{EN}{EK}$$

$\Rightarrow$ MN // DE mà DE $\subset$ (CEF) $\Rightarrow$ MN // (CEF).

357 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh MN // (SBC); MN // (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của SA.

Chứng minh SB // (MNP); SC // (MNP).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

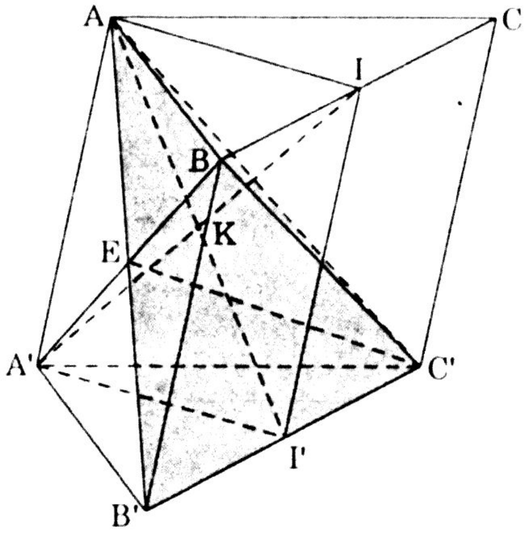
358 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, I' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, B'C'.

a) Chứng minh AI // A'I'.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng IA' với mặt phẳng (AB'C').

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Hướng dẫn



a) $AA' \parallel II' \Rightarrow AII'A'$ là hình bình hành.

b) Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AI' và A'I.

$K \in A'I$ (1)

$K \in AI'$ mà $AI' \subset (AB'C')$

$\Rightarrow$ $K \in (AB'C')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

c) Trước hết ta có :

$C' = (AB'C') \cap (BA'C')$ (3)

Gọi E là giao điểm của AB' và A'B.

$E \in AB'$ mà $AB' \subset (AB'C')$ $\Rightarrow$ $E \in (AB'C')$

$E \in A'B$ mà $A'B \subset (BA'C')$ $\Rightarrow$ $E \in (BA'C')$

$\Rightarrow$ $E = (AB'C') \cap (BA'C')$ (4)

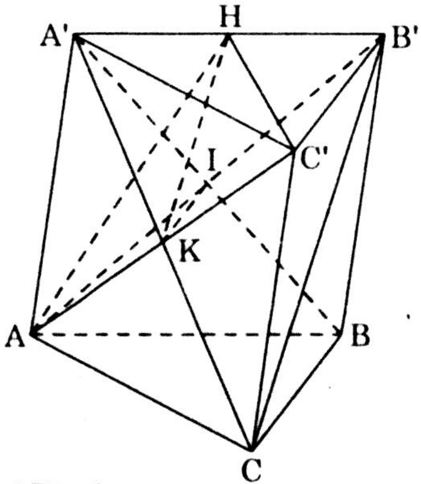
Từ (3) và (4) suy ra $CE = (AB'C') \cap (BA'C')$.

359 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'; H là trung điểm của cạnh A'B'.

a) Chứng minh $CB' \parallel (AHC')$.

b) Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC) song song với mp (BB'C'C).

Hướng dẫn



a) Gọi K là giao điểm của AC' và A'C

$\Rightarrow$ $K \in (AHC')$

$\Rightarrow$ $HK \subset (AHC')$ (1)

Trong $\Delta A'B'C$ thì HK là đường trung bình nên

$HK \parallel B'C$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Gọi I là giao điểm của hai đường chéo A'B và AB' của hình bình hành. Dễ thấy KI là giao tuyến của hai mp (AB'C') và (A'BC) và $KI \parallel BC \Rightarrow$ suy ra đpcm.

360 Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi A'B'C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC. Chứng minh $(A'B'C') \parallel (ABC)$.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

361 Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Chứng minh bốn điểm A', B', C', D' cùng nằm trong một mặt phẳng (P).

b) Chứng minh : (P) // (ABCD).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

362 Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

a) Nêu cách dựng mặt phẳng (P) đi qua a và song song với b.

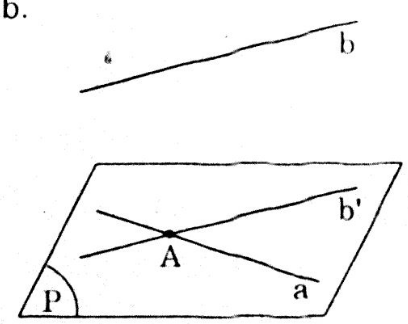
b) Chứng minh rằng mặt phẳng (P) là duy nhất.

Hướng dẫn

a) Lấy một điểm A ∈ a. Kẻ qua A đường thẳng b' // b. Mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng đi qua a và song song với b.

b) Giả sử ta dựng được một mp thứ hai (P') qua a và song song với b. Như vậy (P) và (P') cắt nhau theo giao tuyến a mà cùng song song với b nên a // b. Điều này trái với giả thiết a và b chéo nhau.

Vậy (P) là duy nhất.



363 Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b.

a) Nêu cách dựng mp (P) qua a và song song với b và cách dựng mp (Q) qua b và song song với a.

b) Chứng minh (P) // (Q).

Hướng dẫn

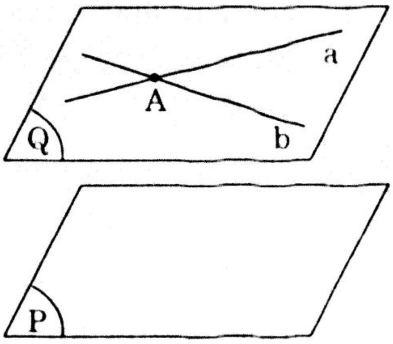
Độc giả tự giải.

364 Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng (không chứa điểm đã cho) thì nằm trong một mặt phẳng song song với mặt phẳng ấy.

Hướng dẫn

Cho điểm A nằm ngoài mp (P). Qua A ta dựng hai đường thẳng a và b cùng song song với (P), a và b xác định một mp (Q). Dễ thấy (Q) // (P).

Theo tính chất 1 (§3) thì (Q) là duy nhất.



365 Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Một mặt phẳng (Q) cắt đường thẳng a. Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) phải cắt nhau.

Hướng dẫn

Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

366 Cho hai đường thẳng a, b và hai mặt phẳng (P), (Q). Biết :

$$a \parallel (P) \text{ và } a \parallel (Q); \qquad b \parallel (P) \text{ và } b \parallel (Q).$$

Xác định vị trí tương đối giữa a và b để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau.

Hướng dẫn

a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

367 Một đường thẳng c song song với một mặt phẳng (P) và hai đường thẳng a, b cắt đường thẳng c tại hai điểm phân biệt và cắt mp (P) tương ứng tại các điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai đường thẳng a, b cắt nhau hoặc song song với nhau là c // AB.

Hướng dẫn

Điều kiện cần : Nếu a và b cắt nhau hoặc song song với nhau thì mặt phẳng α đi qua hai đường thẳng này sẽ cắt (P) theo giao tuyến AB. Rõ ràng AB // c.

Điều kiện đủ : Nếu AB // c thì AB và c đều nằm trong một mặt phẳng và mặt phẳng này chứa cả a lẫn b, như vậy a, b có thể cắt nhau hoặc song song.

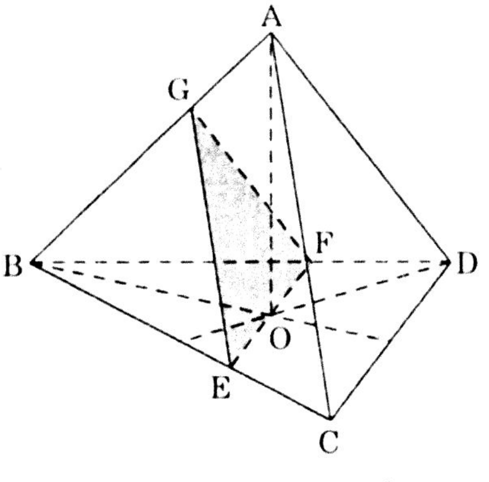
368 Cho tứ diện đều. Hãy dựng một mặt phẳng song song với một mặt bên và đi qua tâm của đáy.

Hướng dẫn

Qua tâm O của đáy, ta kẻ đường thẳng song song với cạnh CD, đường này cắt BC ở E và cắt BD ở F. Qua E dựng đường thẳng song song với AC, cắt AB ở G.

Ta có (GEF) // (ACD).

Thiết diện có được là tam giác đều GEF.



369 Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) song song với cạnh BD, cắt AB, AD, CB, CD theo thứ tự tại các điểm P, Q, R, S.

a) Chứng minh tứ giác PQRS là hình thang.

b) Với điều kiện nào thì PQRS là hình bình hành ?

c) Với điều kiện nào thì PQRS là hình thoi ?

Hướng dẫn

a) Áp dụng hệ quả 1. **b)** (P) // BD và (P) // AC.

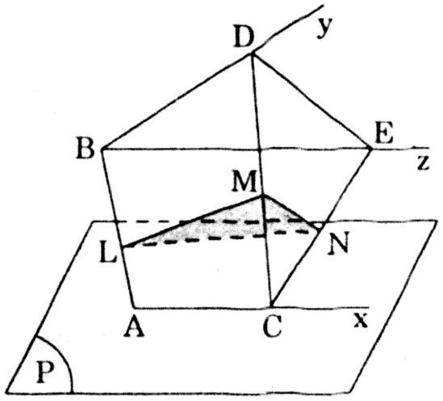
c) (P) phải thỏa mãn hai điều kiện :

(*) (P) // BD và (P) // AC.

(*) (P) đi qua điểm $M \in AB$ mà $\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD}$.

370 Cho hai tia Ax, By. Một mặt phẳng (P) chứa Ax và song song với By. Từ B kẻ Bz // Ax. Lấy ba điểm C, D, E theo thứ tự trên Ax, By, Bz và gọi L, M, N là các điểm chia trong các đoạn thẳng AB, CD, CE theo cùng một tỉ số k. Chứng minh (LMN) // (P).

Hướng dẫn



$\frac{LA}{LB} = \frac{NC}{NE} \Rightarrow LN \ /\!/ \ Ax$

$\Rightarrow LN \ /\!/ \ (P)$ (1)

Tương tự ta có : $LM \ /\!/ \ By$

$\Rightarrow LM \ /\!/ \ (P)$ (2)

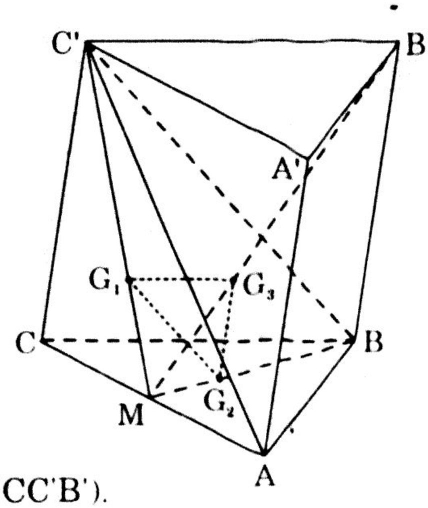
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

371 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ACC', ABC và AB'C. Chứng minh :

a) $G_1G_2 \ /\!/ \ (BCC'B')$.

b) $(G_1G_2G_3) \ /\!/ \ (BCC'B')$.

Hướng dẫn



a) Ta gọi M là trung điểm của AC :

$$\frac{MG_1}{MC'} = \frac{MG_2}{MB}\left(= \frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow G_1G_2 \ /\!/ \ C'B \Rightarrow G_1G_2 \ /\!/ \ (BCC'B')$.

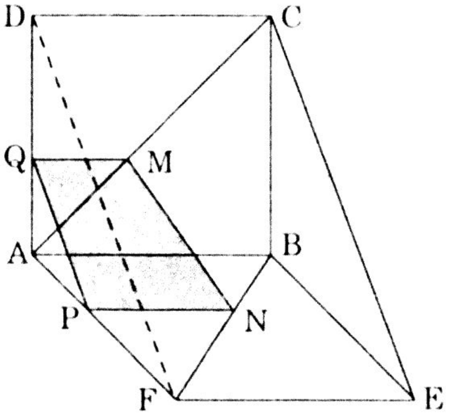
b) Tương tự như trên, ta có $G_1G_3 \ /\!/ \ B'C'$.

Kết hợp với $G_1G_2 \ /\!/ \ C'B$, suy ra $(G_1G_2G_3) \ /\!/ \ (BCC'B')$.

372 Cho hai hình vuông ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự ta lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$.

Từ M và N kẻ các đường song song với đường thẳng AB, đường này cắt AD tại Q và cắt AF tại P. Chứng minh (MNPQ) // (CDFE).

Hướng dẫn



$$MQ \parallel AB \quad \Rightarrow \quad \frac{AQ}{AD} = \frac{AM}{AC}$$

$$NP \parallel AB \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{AF} = \frac{BN}{BF}$$

Kết hợp với giả thiết, suy ra :

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{AP}{AF} \quad \Rightarrow \quad PQ \parallel FD \qquad (1)$$

Ta cũng có $\quad MQ \parallel DC \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

373 Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC', C'D', D'A' và A'A.

Chứng minh các điểm M, N, P, Q, R, S đồng phẳng.

Hướng dẫn

Ta có MN // SP $\Rightarrow$ bốn điểm M, N, P, S cùng nằm trong một mặt phẳng α. Ta lại có $\quad MS \parallel NR \quad \Rightarrow \quad R \in mp\ \alpha$

$$PQ \parallel MS \quad \Rightarrow \quad Q \in mp\ \alpha.$$

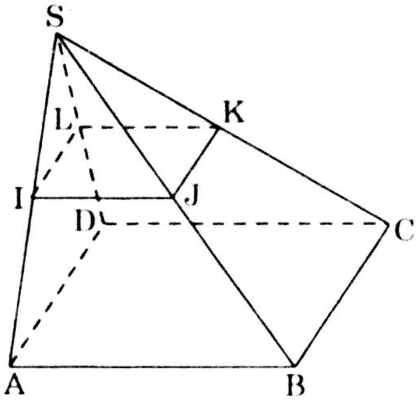
374 Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD và một điểm S nằm ngoài mp (P). Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Chứng minh $\quad$ IJ // (SCD); $\quad$ IK // (SAD).

b) Tìm giao tuyến của mp (IJK) với các mp (SAD) và (SCD).

c) Chứng minh (IJK) // (ABCD) và mp (IJK) đi qua trung điểm của cạnh SD.

Hướng dẫn



a) IJ // AB và AB // CD

$\Rightarrow$ IJ // CD mà CD $\subset$ (SDC) $\Rightarrow$ IJ // (SDC).

Tương tự, ta chứng minh được IK // (SAD).

b) JK // AD

JK $\subset$ (IJK)

AD $\subset$ (SAD)

$\Rightarrow$ Giao tuyến của (IJK) và (SAD) là đường thẳng IL, qua I và song

song với AD.

Lí luận tương tự với giao tuyến KL của 2 mp (IJK) và (SDC).

c) $$\left.\begin{array}{l} IJ \ // \ AB \\ JK \ // \ BC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (IJK) \ // \ (ABCD)$$

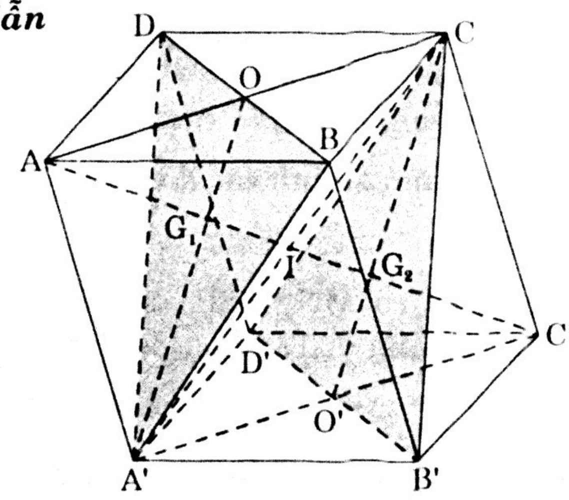
Trong tam giác SAD, IL là đường trung bình, do đó L là trung điểm của SD.

375 Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh (BDA') // (B'D'C).

b) Chứng minh AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 theo thứ tự của các tam giác BDA' và B'D'C và các điểm G_1, G_2 chia đường chéo AC' thành ba đoạn bằng nhau.

Hướng dẫn



a) Dễ thấy A'B // CD' và A'D // B'C.

b) Gọi I là giao điểm các đường chéo của hình hộp, I là trung điểm của A'C.

Gọi O là tâm của đáy ABCD. Trong ΔAA'C, A'O và AI giao nhau tại trọng tâm G_1, ta có

$$\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3},$$

điều này cũng có nghĩa G_1 là trọng tâm của ΔA'DB. Lí luận tương tự đối với G_2.

Ta cũng có $\dfrac{AG_1}{AI} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AG_1}{AC'} = \dfrac{1}{3}$.

Tương tự $\dfrac{C'G_2}{C'A} = \dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad AG_1 = C'G_2 = G_1G_2$.

376 Cho hình chóp S.ABC và một điểm M thuộc cạnh SC và một điểm P thuộc cạnh AB.

a) Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt hình chóp bởi một mặt phẳng α đi qua MP và song song với cạnh BC.

b) Thiết diện là hình gì ?

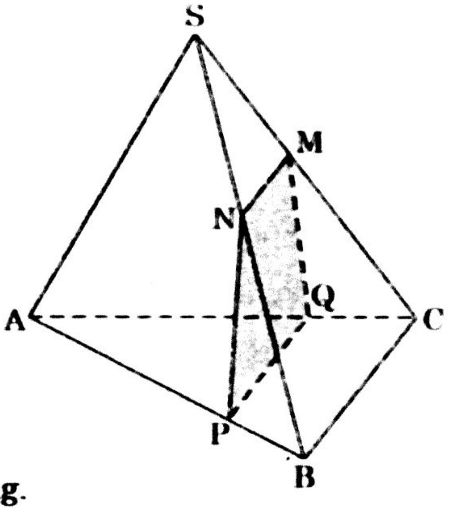
Hướng dẫn

a) Mặt phẳng α đi qua M và song song với BC mà BC ⊂ (SBC) nên α cắt mp (SBC) theo một giao tuyến song song với BC. Từ đó ta có cách dựng đoạn giao tuyến của mp α với mặt bên SBC của hình chóp như sau :

Qua M dựng đường thẳng song song với BC, đường này cắt SB tại N.

Tương tự, qua P dựng đường thẳng song song với BC, đường này cắt AC tại Q, ta được PQ chính là đoạn giao tuyến mà mp α cắt mặt đáy ABC.

MNPQ là thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với BC.



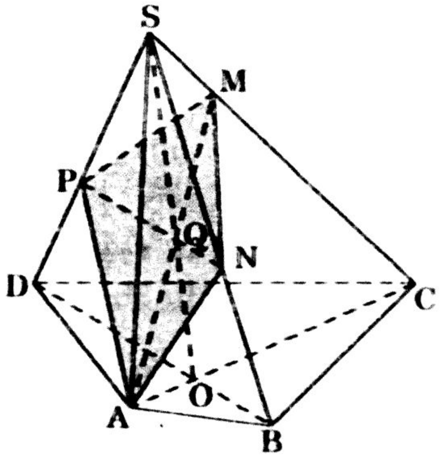
b) Dễ thấy MN // PQ ⇒ MNPQ là hình thang.

377 Cho hình chóp tứ giác ABCD. Dựng thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng (P), đi qua đỉnh A, một điểm M thuộc cạnh SC và song song với đường chéo BD.

Hướng dẫn

Cách dựng : Gọi O là giao điểm của AC, BD. Trong mp (SAC); AM và SO cắt nhau tại điểm Q. Qua Q kẻ đường song song với DB, cắt SB ở N và cắt SD ở P.

Tứ giác ANMP là thiết diện cần dựng.



378 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành và một điểm M thuộc cạnh SC.

a) Dựng thiết diện hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MAB).

b) Thiết diện là hình gì ?

Hướng dẫn

a) *Cách dựng :* Qua M dựng đường thẳng song song với AB, cắt SD tại M.

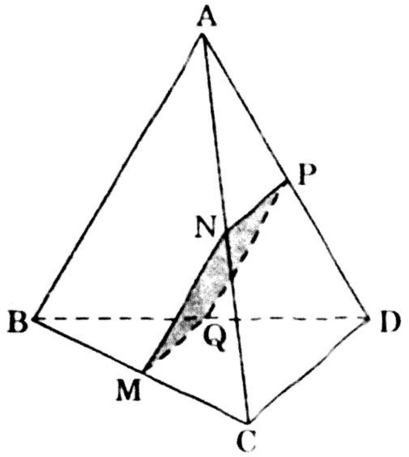
Tứ giác ABMN là thiết diện cần dựng.

b) ABMN là hình thang.

379 Cho tứ diện đều ABCD và một điểm M thuộc cạnh BC.

a) Hãy dựng thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng α đi qua M, song song với AB và CD. Thiết diện là hình gì khi M là trung điểm của BC ?

b) Hãy dựng thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng β đi qua M, song song với AB và AD. Thiết diện là hình gì ?



Hướng dẫn

a) *Cách dựng :* Từ M kẻ đường song song với AB, cắt AC ở N. Từ N kẻ đường song song với CD cắt AD ở P. Từ M kẻ đường song song với CD, cắt BD ở Q. Thiết diện MNPQ là hình bình hành; khi M là trung điểm của BC thì thiết diện là hình thoi.

b) Độc giả tự giải. Thiết diện là tam giác đều.

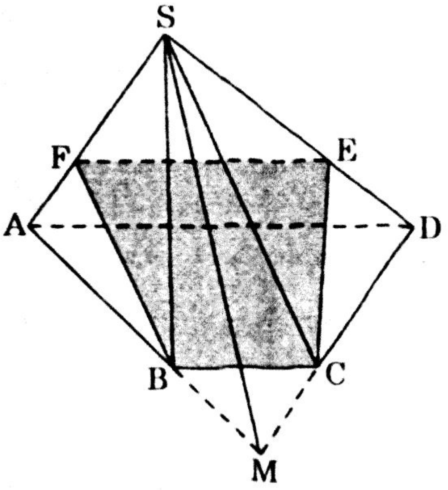
380 Cho ABCD là một hình thang (AD // BC) và một điểm S không thuộc mp (ABCD).

a) Dựng giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) thì song song với mp (ABCD).

c) Mặt phẳng (P) đi qua BC, cắt cạnh SA ở M và cắt cạnh SD ở N. Thiết diện BMNC là hình gì ?

Xác định mặt phẳng (P) để BMNC là hình bình hành.



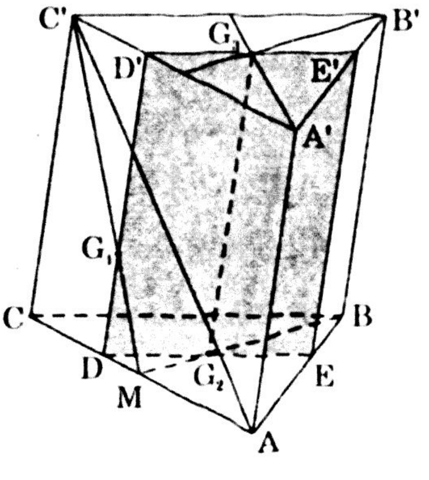
Hướng dẫn

a) và **b)** Độc giả tự giải.

c) Thiết diện là hình thang. Để thiết diện là hình bình hành thì mặt phẳng (P) phải đi qua BC và song song với giao tuyến SM của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

381 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ACC', ABC và A'B'C'.

Dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mp $(G_1G_2G_3)$.



Hướng dẫn

Cách dựng :

- Qua G_1 dựng đường thẳng song song với G_2G_3, cắt AC tại D và A'C' tại D'.

- DG_2 cắt AB ở E; $D'G_3$ cắt A'B' ở E'.

Tứ giác DEE'D' là thiết diện cần dựng.

382 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'.

a) Dựng thiết diện của lăng trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với CB'.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác A'B'C'. Xác định giao tuyến của mp (P) với mp (BB'G).

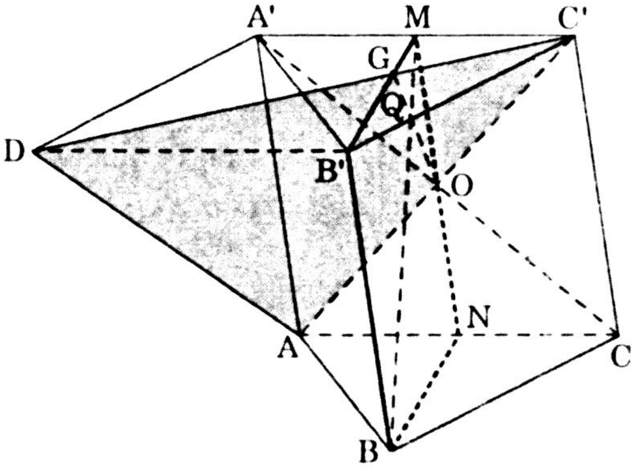
c) Gọi M là trung điểm của cạnh A'C'. Xác định giao điểm của đường thẳng BM với mp (P) ?

Hướng dẫn

a) Trong mp (A'B'C') dựng hình bình hành A'B'C'D.

Dễ thấy AD // CB'. Mặt phẳng (ADC') chính là mp (P) cần dựng.

b) Gọi M là trung điểm của A'C' và N là trung điểm của AC. Thiết diện là tứ giác BB'MN (tứ giác này là hình bình hành).



c) Gọi O là tâm của mặt bên ACC'A'.

GO và BM cùng nằm trong mp (BNMG) nên cắt nhau tại một điểm Q; Q ∈ GO ⇒ Q ∈ (P); Q ∈ BM.

Suy ra Q là giao điểm của BM và mp (P).

383 Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh : AB' // (CDD'C').

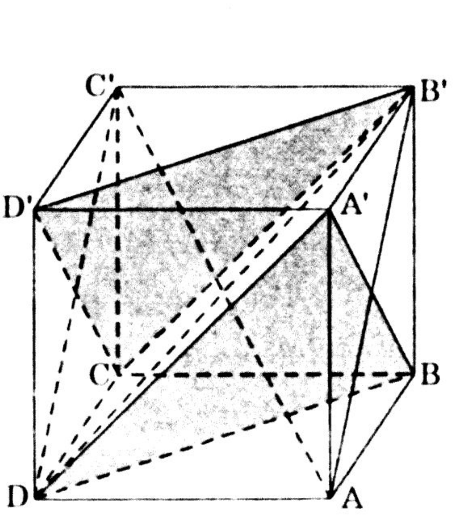
b) Chứng minh hai mặt phẳng (A'BD) và (CB'D') song song với nhau.

c) Dựng thiết diện của hình hộp, khi cắt bởi một mặt phẳng (P) đi qua trung điểm O của đường chéo AC' và song song với DA', CD'.

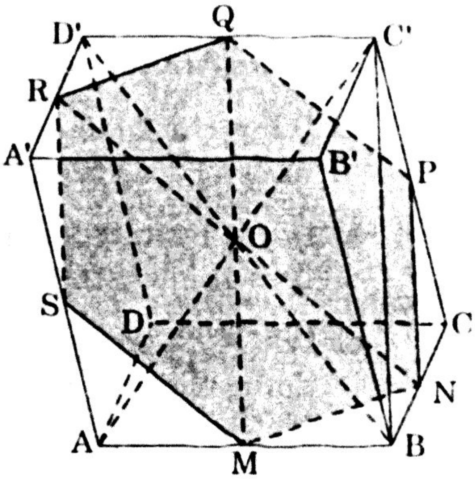
Hướng dẫn

a) AB' // DC' và DC' ⊂ (CDD'C')

b) A'B // D'C và A'D // B'C.



c) Qua O ta kẻ đường thẳng song song với AD', đường thẳng này nằm trong mp (ABC'D') và cắt AB tại M, cắt D'C' tại Q. Tương tự, qua O kẻ đường thẳng song song với nhau CD', đường này nằm trong mp (BCD'A') cắt BC tại N và cắt A'D' tại R.



Mặt (MNQR) chính là mp đi qua O và song song với AD' và CD'. Mặt phẳng (MNQR) cắt mp (ABB'A') theo giao tuyến SM và cắt mp (CDD'C') theo giao tuyến QP. Dễ thấy MS // PQ.

Lục giác MNPQRS chính là thiết diện cần dựng.

384 Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trên các cạnh AB, DD', C'B' theo thứ tự ta lấy ba điểm M, N, P sao cho :

AM = D'N = B'P.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (MNP) và (AB'D') song song với nhau.

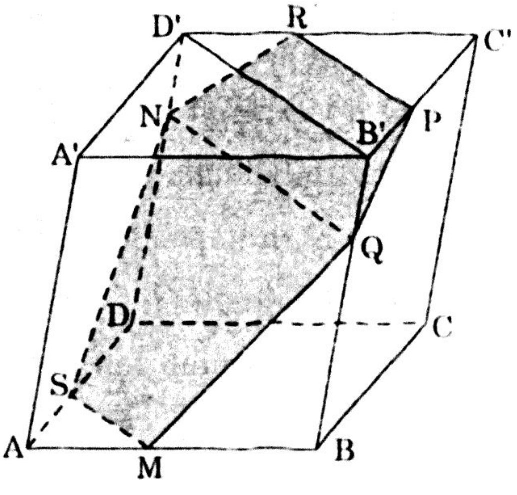
b) Dựng thiết diện hình hộp khi cắt bởi mp (MNP).

Hướng dẫn

a) Trên BB' lấy điểm Q sao cho

B'Q = D'N.

Ta có NQ // D'B' và MQ // AB'.



Mặt phẳng α đi qua ba điểm N, M, Q song song với mp (AB'D').

Ta cũng có B'Q = B'P

⇒ PQ // C'B hay PQ // AD'

Cho ta PQ // mp (AB'D')

Suy ra P ∈ α hay α là mp (MNP).

Từ đây suy ra đpcm.

b) Từ P kẻ đường song song với B'D' cắt D'C' tại R.

Từ M kẻ đường song song với NQ cắt AD tại S.

Các điểm R, S đều thuộc mp (MNP).

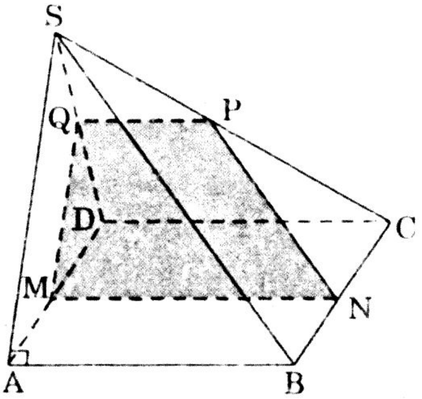
Thiết diện là hình lục giác MQPRNS.

385 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại A. Trên cạnh AD lấy một điểm M.

a) Dựng thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng đi qua M và song song với mp (SAB).

b) Thiết diện là hình gì ?

Hướng dẫn



a) *Cách dựng :* Từ M kẻ đường song song với SA, cắt SD ở Q. Từ M kẻ đường song song với AB, cắt BC ở N.

Từ Q kẻ đường song song với DC, cắt SC ở P.

Do MN // QP ⇒ bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Thiết diện cần dựng là tứ giác MNPQ.

b) Thiết diện là hình thang vuông tại M, N.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

386 Cho hình vuông ABCD. Trên các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song và cùng chiều, ta lấy theo thứ tự, các điểm A', B', C', D'.

a) Chứng minh rằng đường thẳng nối các trung điểm của A'C' và B'D' luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh bốn điểm A', B', C', D' đồng phẳng khi và chỉ khi trung điểm của A'C' trùng với trung điểm của B'D'.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

387 Hai mặt phẳng (P) và (Q) giao nhau theo giao tuyến Δ và hai điểm D, C thuộc Δ; B là trung điểm của đoạn thẳng DC. Trong mặt phẳng (P) dựng tam giác đều ABC và trong mặt phẳng (Q) dựng tam giác đều EDB. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AC và DE.

a) Chứng minh AD // (BIJ) và CE // (BIJ).

b) F là giao điểm của đường thẳng AE với mp (BIJ), tứ giác BIFJ là hình gì ?

c) K và L theo thứ tự là trung điểm của AB và BE. Chứng minh ba đường thẳng KL, IJ và BF đồng quy.

Hướng dẫn

a) Ta có AD // BI và BI ⊂ (BIJ)

CE // BJ. và BJ ⊂ (BIJ).

b) BI = (BIJ) ∩ (ADC)

FJ = (BIJ) ∩ (ADE)

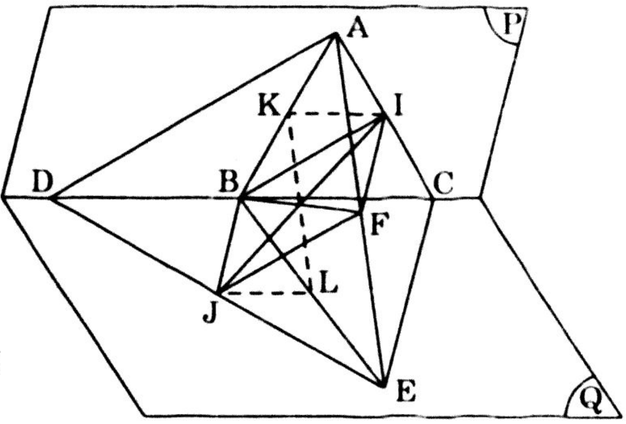
và BI // AD

Suy ra BI // FJ (1)

Tương tự ta có

BJ // IF (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BIFJ là hình bình hành.



c) BIFJ là hình bình hành nên IJ và BF cắt nhau tại trung điểm O của IJ. (3)

Chứng minh tương tự như câu b) ta có tứ giác IKJL là hình bình hành nên IJ và KL cũng cắt nhau tại trung điểm O của đoạn thẳng IJ. (4)

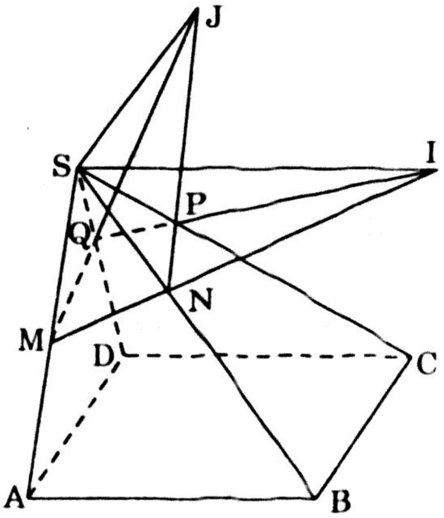
Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

388 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. (P) là một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q. Gọi I là giao điểm của MN và PQ, J là giao điểm của MQ và PN.

a) Chứng minh (SIJ) // (ABCD) và IJ // (ABCD).

b) Mặt phẳng (P) phải thỏa mãn điều kiện gì để tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Hướng dẫn



a) I = MN ∩ PQ

MN ⊂ (SAB) ⇒ I ⊂ (SAB)

PQ ⊂ (SAD) ⇒ I ⊂ (SAD)

⇒ SI = (SAD) ∩ (SAB)

mà (SCD) chứa DC và (SAB) chứa AB,

AB // DC

Suy ra SI // AB

Kết hợp với AB ⊂ (ABCD)

nên SI // (ABCD) (1)

Tương tự, ta có SJ // (ABCD) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ (SIJ) // (ABCD) (3)

Ta lại có $IJ \subset (SIJ)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $IJ \parallel (ABCD)$.

b) $(P) \parallel (ABCD)$.

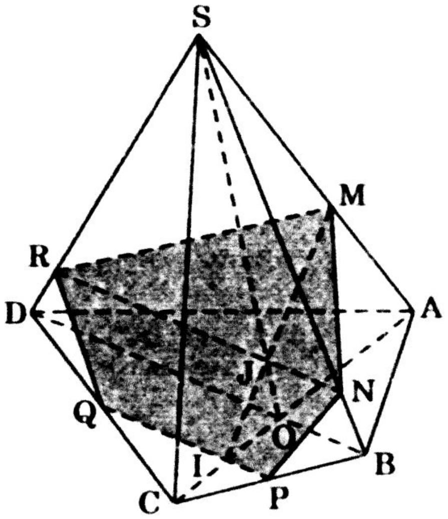
389 Cho hình chóp S.ABCD; O là giao điểm của AC, BD; P và Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD và M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

a) Xác định các giao điểm N, R theo thứ tự của các đường thẳng SB, SD với mp (MPQ). Suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (MPQ).

b) Chứng minh BD // (MPQ).

c) Dựng giao điểm của SO với mp (MNPQR).

Hướng dẫn



a) Gọi I là giao điểm của PQ với OC (I là trung điểm của OC). Trong mp (SAC) IM cắt SO tại J. Trong mp (SDB) kẻ qua J đường thẳng song song với DB, cắt SB tại N và cắt SD tại R. Ta có :

$$N = SB \cap (MPQ)$$

$$R = SD \cap (MPQ)$$

và ngũ giác MNPQR là thiết diện của hình chóp với mp (MPQ).

(Độc giả chứng minh).

b) $NR \parallel BD$ mà $NR \subset (MPQ) \quad \Rightarrow \quad BD \parallel (MPQ)$.

c) $J = SO \cap (MNPQR)$.

390 Cho hình bình hành ABCD; Bt, Cy, Dz là ba tia song song và cùng chiều. Gọi M, N theo thứ tự là hai điểm di động trên Bt, Dz sao cho BM = DN = x. Mặt phẳng (AMN) cắt Cy tại P.

a) Xét hình dạng của tứ giác APMN.

b) Chứng minh rằng khi x thay đổi thì mặt phẳng (AMN) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

c) Gọi K là trung điểm của CP. Chứng minh (KMN) // (ABCD).

Hướng dẫn

a) Tứ giác APMN là hình bình hành.

b) Gọi Δ là giao tuyến của (AMN) với (ABCD).

Dễ thấy Δ // DB.

Khi x thay đổi thì (AMN) luôn đi qua Δ.

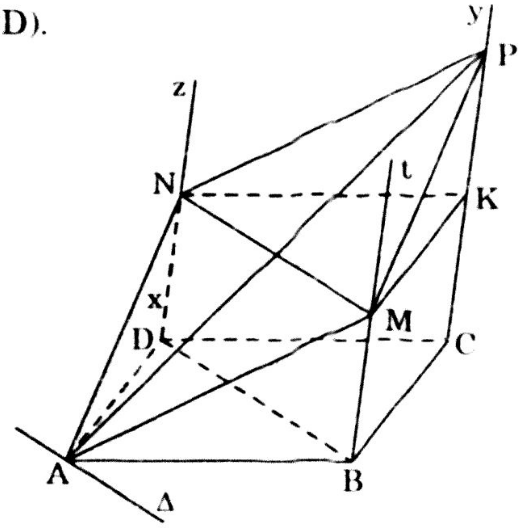
c) Ta có MN // (ABCD) (1)

MK // CD

và CD $\subset$ (ABCD)

Suy ra MK // (ABCD) (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.



391 Cho hình vuông ABCD, cạnh a và tam giác ADF vuông cân tại đỉnh A nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Biết BF = $a\sqrt{2}$. Trên các đoạn thẳng AC, FD theo thứ tự, ta lấy hai điểm M, N sao cho

$$AM = FN = x \quad \text{với} \quad 0 \le x \le a\sqrt{2}.$$

a) Chứng minh MN luôn song song với mp (ABF).

b) Chứng minh AN = MN = BM.

c) Tính MN theo a và x. Xác định giá trị của x để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn

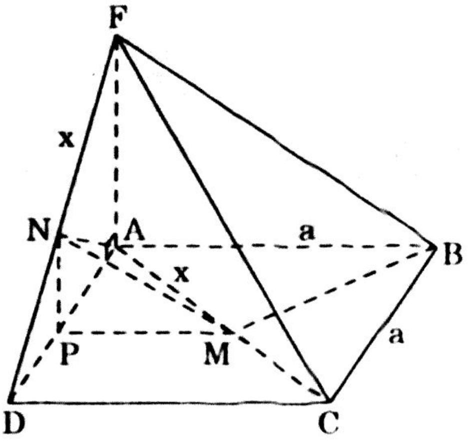
a) Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD tại P, ta được :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AP}{AD} = \frac{x}{a\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Vì FN = x và FD = $a\sqrt{2}$ nên ta cũng có

$$\frac{FN}{FD} = \frac{x}{a\sqrt{2}} \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{FN}{FD}$

$$\Rightarrow \quad NP \,//\, AF$$

Từ MP // AB và NP // AF $\Rightarrow$ (MNP) // (ABF).

Kết hợp với MN $\subset$ (MNP) suy ra MN // (ABF).

b) Dễ thấy ΔFAB có $AB = a$, $AF = a$, $BF = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ ΔFAB vuông tại A

NP // FA và MP // AB và FA ⊥ AB nên NP ⊥ MP hay tam giác NPM vuông tại P.

Ta cũng có AP = PM. Kết hợp với NP chung suy ra hai tam giác vuông APM và APN bằng nhau cho ta MN = AP (3)

Từ sự bằng nhau của hai tam giác $\Delta FAN = \Delta ABM$ (c-g-c) ta suy ra

$$BM = AP \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

c) Ta có $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB.AM.\cos\widehat{BAM}$

$$\Rightarrow \quad BM^2 = a^2 + x^2 - 2a.x.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + x^2 - ax.\sqrt{2}$$

Vì $BM = MN$ $\Rightarrow$ $MN^2 = a^2 + x(x - a\sqrt{2})$

MN nhỏ nhất khi : $x(x - a\sqrt{2})$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chương III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. Vectơ trong không gian

1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian, về định nghĩa, các phép toán và tính chất của các phép toán cộng, trừ hai vectơ, nhân một số với một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ, điều kiện để hai vectơ cộng tuyến (cùng phương) đều giống như đối với các vectơ trong mặt phẳng.

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

a) *Định nghĩa*

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

b) *Tính chất*

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ *và* $\vec{c}$ *trong không gian.*

- *Từ một điểm O bất kì vẽ* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. *Ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng.*
- *Nếu một trong ba vectơ là vectơ không* $\vec{0}$ *thì ba vectơ đồng phẳng.*
- *Nếu hai trong ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *cùng phương thì ba vectơ đồng phẳng.*

c) *Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng*

Định lí 1. *Cho hai vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *không cùng phương và một vectơ* $\vec{c}$ *trong không gian. Khi đó ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n duy nhất sao cho* $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Định lí 2. *Cho ba vectơ không đồng phẳng. Với bất kì một vectơ* $\vec{x}$ *nào trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m, n và p duy nhất sao cho* $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

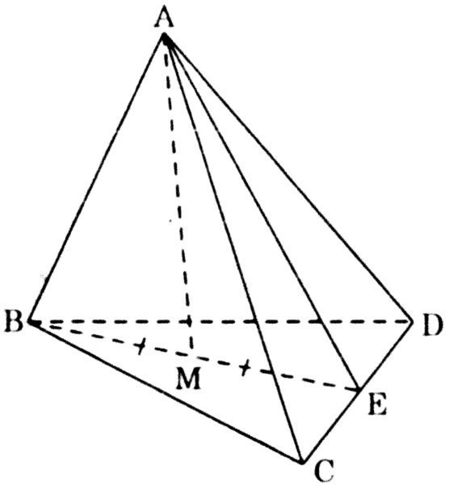
BÀI TẬP

392 Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của đường trung tuyến BE của tam giác BCD.

a) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn



a) AM là trung tuyến của ΔABE :

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \qquad (1)$$

AE là trung tuyến của ΔACD :

$$2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

b) Ta có $2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$; với $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ta tính được $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

393 Cho ba vectơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{w} = 8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

a) Chứng minh rằng $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ đồng phẳng.

b) Biểu diễn mỗi vectơ theo các vectơ còn lại.

Hướng dẫn

a) Ta có $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$; $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{w}$; $\vec{u} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

394 Cho hai tam giác ABC và A'B'C' nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Chứng minh rằng ba đường thẳng đi qua các trung điểm của các cặp đoạn thẳng AB' và A'B; BC' và B'C; CA' và AC' song song với một mặt phẳng.

Hướng dẫn

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB' và A'B.

I là trung điểm của AB', với mọi điểm O bất kì ta có

$$2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'}$$

Tương tự ta có : $2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{IJ} = 2(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

Hoàn toàn tương tự, nếu gọi E, F là trung điểm của BC' và B'C ta có

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC} \qquad (2)$$

M, N theo thứ tự là trung điểm của CA' và AC' thì

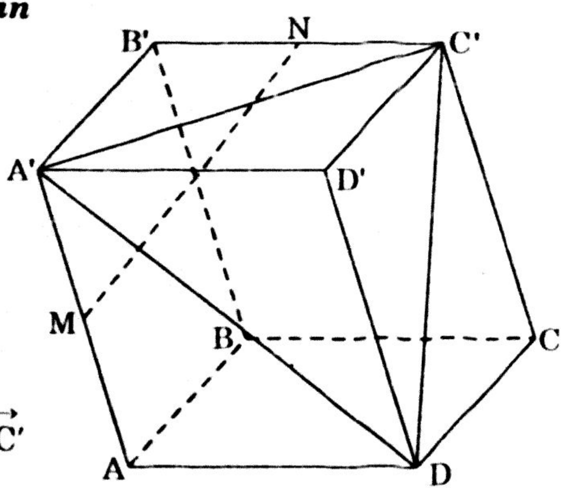
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra : $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng hay ba đường thẳng IJ, EF, MN cùng song song với một mặt phẳng.

395 Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AA' và B'C'. Chứng minh MN // mp (DA'C').

Hướng dẫn



M là trung điểm của AA' nên

$$2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA'} \qquad (1)$$

N là trung điểm của B'C' nên

$$2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{DC'} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2(\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{DB'} - \overrightarrow{DC'}$$

$$\Rightarrow \ 2\overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{DC'}) + (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB'})$$

$$\Rightarrow \ 2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{B'A}, \text{ vì } \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{C'D} \text{ nên } 2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'D} \qquad (*)$$

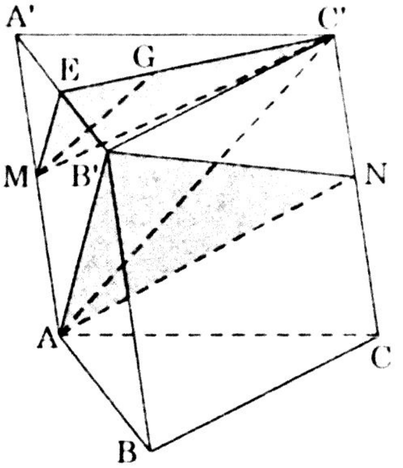
Đẳng thức (*) chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{C'A'}$ và $\overrightarrow{C'D}$ đồng phẳng, suy ra đpcm.

396 Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'; G là trọng tâm của tam giác A'B'C' và M, N theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AA', CC'.

a) Chứng minh MG // mp (AB'N).

b) Chứng minh mp (MGC') // mp (AB'N).

Hướng dẫn



a) Gọi E là trung điểm của A'B'.

Ta có $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EG}$ (1)

Ta có các thông tin sau :

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}$$

$$\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{C'E}\ ; \qquad \overrightarrow{C'E} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'B'})\ ;$$

$$\overrightarrow{C'B'} = -\overrightarrow{BC}\ ; \qquad \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}\ .$$

Sử dụng các thông tin này, ta có :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB'} - \frac{1}{6}(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'B'})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}) + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC'} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Vì $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC}$ nên (2) trở thành $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ (3)

Đẳng thức (3) chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AN}$ đồng phẳng, cho ta

MG // mp (AB'N) (4)

b) Ta lại có : $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'C'}$;

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$.

Với $\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

ta có $\overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AN}$

Kết quả này cho ta MC' // mp (AB'N) (5)

Từ (4) và (5) suy ra đpcm.

397 Cho tứ diện ABCD. Biết AC = 4, AD = 5, BC = 3 và BD = 1; AB = 2; CD = 6. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, CD.

Hướng dẫn

Từ công thức cho tích vô hướng của hai vectơ, ta có :

$$\cos(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{CD}|}$$

Thay $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ và khai triển các tích, ta được :

$$\cos(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

Lại thay $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OD}^2)$

$$\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OC}^2)$$

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(AD^2 - OA^2 - OD^2)$$

$$\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(AC^2 - OA^2 - OC^2)$$

Và rút gọn ta được : $\cos(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = \dfrac{AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2}{2AB.CD}$

They các giá trị bằng số ta được : $\cos(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) = -\dfrac{17}{24} \approx -0{,}7083$

$$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}) \approx 135^0.06'$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB, CD là $\varphi \approx 44^0\,54'$.

398 Cho bốn điểm O, A, B, C không đồng phẳng. Gọi A', B', C', D' là bốn điểm theo thứ tự, thỏa mãn các hệ thức :

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\ ; \qquad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\ ; \qquad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

và một điểm S mà $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a) Chứng minh các bộ bốn điểm sau đây là bốn điểm đồng phẳng :

- A, B', C', S;
- C, B', A', S;
- B, A', C', S.

b) Chứng minh mp (OAB'C) // mp (AC'SB').

Hướng dẫn

a) Từ giả thiết ta suy ra $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{DB}$

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}$$

Ba vectơ $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AB}$ đồng phẳng, suy ra $S \in (A, B', C')$.

b) Suy ra từ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB'}$.

§2. Quan hệ vuông góc

1. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng

a) Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a' // a, b' // b và a', b' cùng đi qua một điểm trong không gian.

b) Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi góc giữa chúng bằng 90^0.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) Định nghĩa

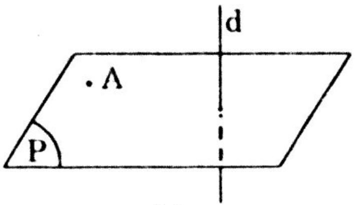
Một đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Định lí. *(Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng)*

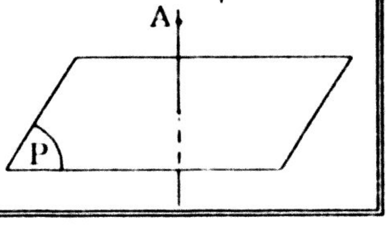
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng.

b) Các tính chất

Tính chất 1. *Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.*

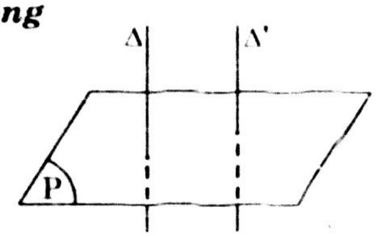


Tính chất 2. *Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.*



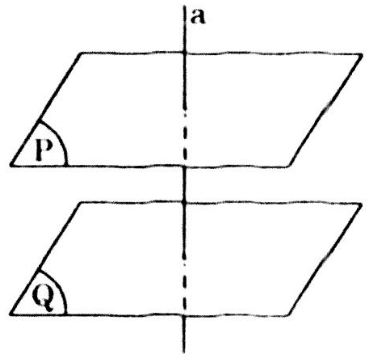
c) *Liên hệ giữa tính vuông góc và tính song song*

Tính chất 3.



- *Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng thì cũng vuông góc với đường kia.*
- *Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.*

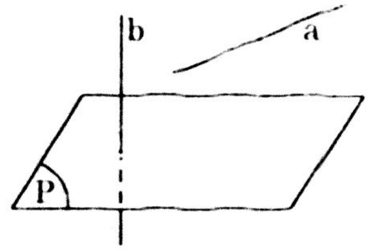
Tính chất 4.



- *Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng vuông góc với một trong hai mặt phẳng ấy thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.*
- *Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

Tính chất 5.

- *Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) thì b cũng vuông góc với đường thẳng a.*
- *Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng không chứa đường thẳng đó cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.*



d) *Định lí 3 đường vuông góc*

- **Phép chiếu vuông góc**

  Phép chiếu lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mp (P).

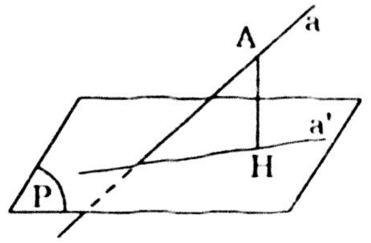
  Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song.

- **Định lí 3 đường vuông góc**

  Cho đường thẳng a có hình chiếu lên mp (P) là đường thẳng a'. Một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi b vuông góc với a'.

e) *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Một đường thẳng a không vuông góc với mp (P). Góc giữa đường thẳng a với mp (P) là góc giữa a với hình chiếu vuông góc a' của a trên mp (P).



3. Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

a) *Góc giữa hai mặt phẳng*

- *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

- *Trong thực hành, để xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau, qua một điểm nằm trên giao tuyến của chúng, ta vẽ một mặt phẳng vuông góc với giao tuyến ấy. Góc hợp bởi các giao tuyến của mặt phẳng vuông góc này với các mặt phẳng đã cho là góc giữa hai mặt phẳng đã cho.*

b) *Hai mặt phẳng vuông góc*

- **Định nghĩa**

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

- ***Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc***

Định lí. *Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi một trong hai mặt phẳng ấy chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*

Hệ quả :

1. *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm nằm trong (P), thì đường thẳng a đi qua A vuông góc với (Q) sẽ nằm trọn trong (P).*

   Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong (P) mà vuông góc với giao tuyến cũng sẽ vuông góc với mp (Q).

2. *Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

3. *Qua một đường thẳng a không vuông góc với mp (P) có duy nhất một mp (Q) vuông góc với mp (P).*

4. Hình lăng trụ đứng

a) *Hình lăng trụ đứng*

- *Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mp đáy.*

  Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật.

- *Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.*

  Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật bằng nhau.

b) *Hình hộp đứng*

- *Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.*

Người ta cũng nói hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mp đáy.

Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật bằng nhau.

- *Hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật*

Gọi a, b, c là các kích thước và d là đường chéo của hình hộp chữ nhật thì ta có liên hệ

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

- *Hình hộp có tất cả các mặt bên bằng nhau là hình lập phương.*

Hình lập phương có 6 mặt là 6 hình vuông bằng nhau.

Liên hệ giữa đường chéo d của hình lập phương với cạnh a của nó là

$$d^2 = 3a^2.$$

5. Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có :

- *Đáy là đa giác đều;*
- *Các cạnh bên bằng nhau.*

Trong hình chóp đều thì :

- *Chân đường cao trùng với tâm của đáy;*
- *Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.*

BÀI TẬP

399 Cho tứ diện đều ABCD; K là trung điểm của cạnh CD.

a) Xác định và tính góc giữa các đường thẳng AB và CD.

b) Xác định và tính góc giữa các đường thẳng AK và BC.

Hướng dẫn

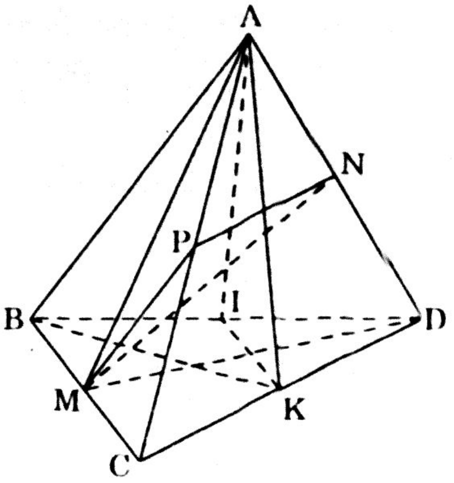
a) Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, AD, AC.

Ta có PM // AB; PN // CD

do đó, góc giữa hai đường thẳng AB, CD bằng góc giữa hai đường thẳng PM, PN tức là bằng góc $\widehat{MPN}$.

Đặt a là cạnh của tứ diện đều, ta có

$$PM = PN = \frac{a}{2} \qquad (1)$$



Tam giác AMD cân, có $AM = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN \perp AD$.

$$MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN^2 = PM^2 + PN^2$

$\Rightarrow \Delta MPN$ vuông góc tại P, suy ra $\widehat{MPN} = 90^0$

Vậy góc giữa AB và CD bằng 90^0 hay $AB \perp CD$.

Chú ý : Để chứng minh $AB \perp CD$ ta có thể lí luận như sau :

$$\text{Ta có} \quad \left.\begin{matrix} BK \perp CD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABK)$$

$$\text{mà} \quad AB \subset (ABK) \Rightarrow CD \perp AB.$$

b) Gọi I là trung điểm của BD, ta có KI // CB, do đó góc giữa AK và BC bằng góc giữa AK và IK hay bằng góc $\widehat{AKI}$.

Trong tam giác AKI, ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IK = \frac{a}{2}$

Áp dụng định lí cosin vào tam giác AKI ta tính được :

$$\cos\widehat{AIK} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}2887 \Rightarrow \widehat{AIK} \approx 73^0\,13'.$$

400 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hai mặt bên SAB, SAD là hai tam giác vuông tại A và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Hãy tính góc giữa SB và CD; giữa SD và BC.

b) Chứng minh $SA \perp BD$; $SC \perp BD$; $SB \perp AD$; $SD \perp AB$.

c) Tính góc giữa SB và AC; SD và AC.

Hướng dẫn

a) Đáp số : 60^0; 60^0. **b)** Độc giả tự giải. **c)** $69^0\,18'$.

401 Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = 2a$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AD. Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

Hướng dẫn

Góc giữa AB và CD bằng góc $\widehat{MPN}$. Áp dụng định lí cosin vào tam giác MPN với $PM = a$; $PN = a$; $MN = a\sqrt{2}$ ta tính được

$$\cos\widehat{MPN} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} = 120^0.$$

402 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh a, và O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD; SO = a. Mặt bên SDC là tam giác đều.

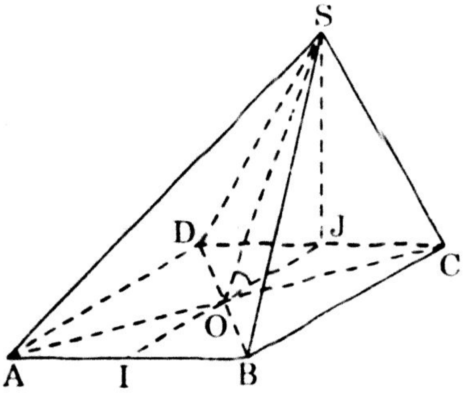
a) Tìm góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

b) Tìm góc giữa hai đường thẳng SO và BC.

Hướng dẫn

a) Đáp số : 60^0.

b) Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Góc giữa SO và BC là bằng góc giữa SO và IJ.



Ta có $SO = a; \quad OJ = \frac{a}{2}; \quad SJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Từ $SJ^2 = SO^2 + OJ^2 - 2SO.OJ.\cos SOJ$

ta tính được $\cos\varphi = \frac{1}{2}$

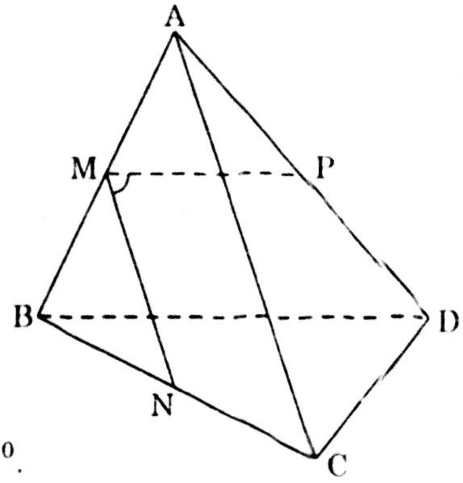
$\Rightarrow \quad \varphi = 60^0$.

403 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, AD.

a) Xác định góc giữa hai đường thẳng AC và BD.

b) Chứng minh rằng tam giác MNP vuông góc tại M khi và chỉ khi $AC \perp BD$.

Hướng dẫn



a) Do $MP // BD; \quad MN // AC$

$\Rightarrow$ góc giữa AC và BD bằng góc giữa MP, MN, tức là bằng góc $\widehat{NMP}$.

b) Khi $\widehat{NMP} = 90^0 \quad \Rightarrow \quad MP \perp MN$

Suy ra $AC \perp BD$.

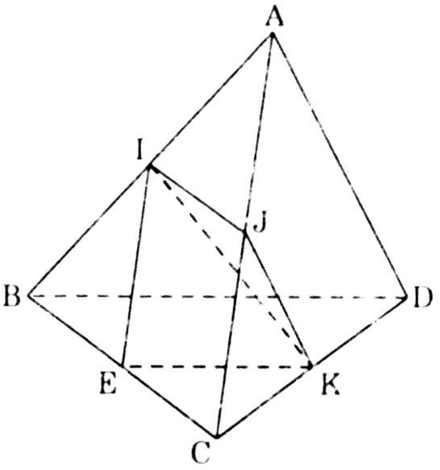
Ngược lại nếu $AC \perp BD \quad \Rightarrow \quad MP \perp MN$

$\Rightarrow \quad \widehat{NMP} = 90^0$.

404 Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD.

a) Xác định góc giữa IK và AC; góc giữa IK và BD.

b) Chứng minh rằng góc giữa IK và AC bằng góc giữa IK và BD khi và chỉ khi AC = BD.



Hướng dẫn

Gọi E là trung điểm của BC.

a) Ta có IE // AC suy ra góc giữa IK và AC bằng góc $\widehat{EIK}$.

Tương tự, góc giữa IK và BD bằng góc IK và KE : $\widehat{IKE}$.

b) $\widehat{EIK} = \widehat{IKE}$ $\Rightarrow$ IEK cân tại E

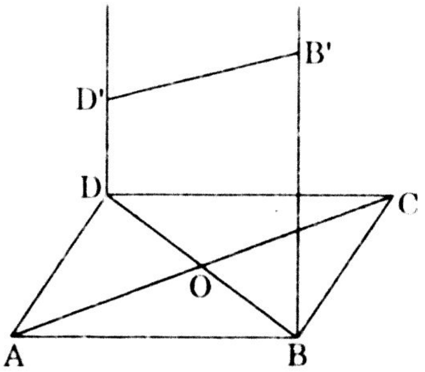
$\Rightarrow$ EI = EK

Suy ra AC = BD và ngược lại, nếu AC = BD.

$\Rightarrow$ EI = EK $\Rightarrow$ ΔIEK cân $\Rightarrow$ $\widehat{EIK} = \widehat{IKE}$.

405 Cho hình vuông ABCD. Trên các đường thẳng vuông góc với mp (ABCD) kẻ từ B và D ta lấy các điểm B' và D'.

Chứng minh B'D' $\perp$ AC.



Hướng dẫn

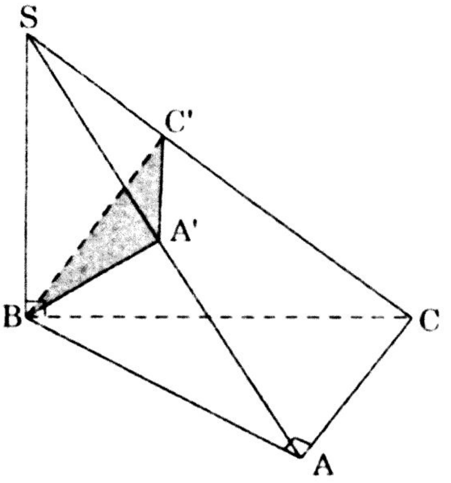
Suy ra từ B'D' $\subset$ (BDD'B')

mà AC $\perp$ (BDD'B').

406 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A. Trên đường thẳng vuông góc với mp (ABC) kẻ từ đỉnh B, ta lấy một điểm S. Mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC tại C' và cắt SA tại A'.

a) Chứng minh : BA' $\perp$ AC

b) Chứng minh BA'C' là tam giác vuông.



Hướng dẫn

a) AC $\perp$ (SAB) $\Rightarrow$ AC $\perp$ BA'.

b) SC $\perp$ (BA'C') $\Rightarrow$ SC $\perp$ BA'

Kết hợp với SA $\perp$ BA'

Suy ra BA' $\perp$ (SAC)

$\Rightarrow$ BA' $\perp$ A'C'

$\Rightarrow$ ΔBA'C' vuông tại A.

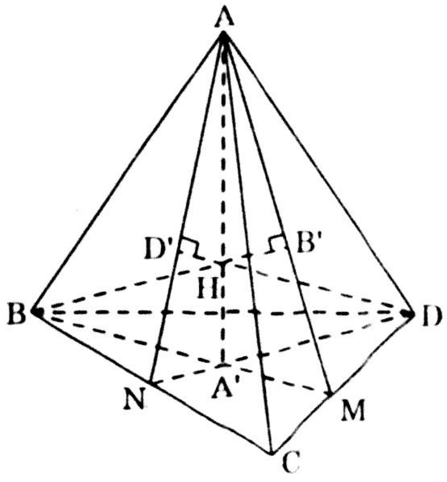
407 Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng và AB $\perp$ CD. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ mỗi điểm A, B, C, D đến mặt phẳng được xác định bởi ba điểm còn lại.

a) Chứng minh AA' và BB' cắt nhau.

b) Giả sử có thêm giả thiết $AC \perp BD$. Chứng minh $AD \perp BC$.

c) Chứng minh bốn đường thẳng AA', BB', CC' và DD' đồng quy.

Hướng dẫn



a) Gọi M là giao điểm của BA' và CD.

$$AA' \perp (BCD) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} AA' \perp CD \\ AB \perp CD \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad CD \perp (ABM)$$

Kết hợp với $\quad CD \subset (ACD)$

$$\Rightarrow \quad (ABM) \perp (ACD) \qquad (1)$$

Theo giả thiết $\quad BB' \perp (ACD) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\quad BB' \subset (ABM)$.

Hai đường thẳng AA'; BB' cùng thuộc mp (ABM) và không thể song song với nhau nên chúng phải cắt nhau.

b) Gọi H là giao điểm của AA' và BB'. Với $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$, ta chứng minh được DD' cắt AA' và DD' cắt BB' $\Rightarrow$ DD' đi qua H và $BC \perp (AHD) \Rightarrow BC \perp AD$.

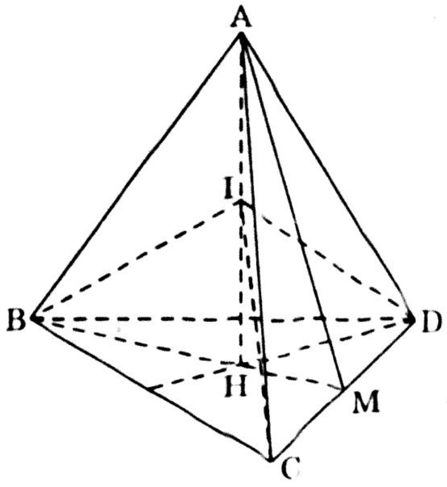
c) Với $AB \perp CD$ và $AC \perp BD \Rightarrow$ CC' cũng đi qua H (đpcm).

408 Cho tứ diện đều ABCD, kẻ $AH \perp (BCD)$ và gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH.

a) Chứng minh các cạnh đối của tứ diện vuông góc với nhau.

b) Các đường thẳng IB, IC, ID đôi một vuông góc với nhau.

Hướng dẫn



a) Gọi M là trung điểm cạnh CD.

ΔDBC đều $\quad \Rightarrow \quad BM \perp CD \qquad (1)$

ΔACD đều $\quad \Rightarrow \quad AM \perp CD \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\quad CD \perp (ABM)$.

Mặt khác $\quad AB \subset (ABM)$

Vậy $\quad CD \perp AB$.

Các trường hợp khác, chứng minh tương tự.

b) Gọi độ dài cạnh tứ diện là a. Ta có :

$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad BH = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \quad \Rightarrow \quad AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad IH = \frac{1}{2}AH \quad \Rightarrow \quad IH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$BI^2 = BH^2 + IH^2 \quad \Rightarrow \quad BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Áp dụng định lí cosin vào tam giác BIC; ta tính được :

$$BC^2 = BI^2 + CI^2 - 2.BI.CI.\cos\widehat{BIC}$$

Dễ thấy $BI = CI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $BC = a$

Từ đây ta có : $\cos\widehat{BIC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{BIC} = 90^0 \quad \Rightarrow \quad IC \perp IB.$

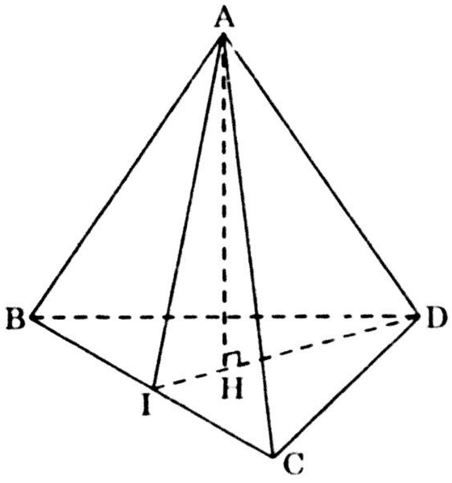
Lí luận tương tự, ta có : $IB \perp ID$ và $IC \perp ID$.

409 Tứ diện ABCD, các mặt ABC và DBC là các tam giác đều; I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $BI \perp (AID)$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác AID. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Hướng dẫn



a) ABC và DBC là các tam giác đều, cho ta

$$\left.\begin{array}{l} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad BC \perp (AID)$$

hay $BI \perp (AID)$.

b) $$\left.\begin{array}{l} BC \perp (AID) \\ AH \subset (AID) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AH \perp BC \qquad (1)$$

Theo giả thiết $\quad AH \perp ID \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD)$.

Chú ý : Có thể chứng minh $AH \perp (BCD)$ như sau :

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp (AID) \\ (BCD) \supset BC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (BCD) \perp (AID)$$

(BCD) và (AID) giao nhau theo giao tuyến ID mà đường thẳng AH nằm trong mp (AID) và $AH \perp ID$, suy ra $AH \perp (AID)$.

410 Cho tứ diện S.ABC, tam giác ABC vuông góc tại đỉnh B, $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$

b) AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Hướng dẫn

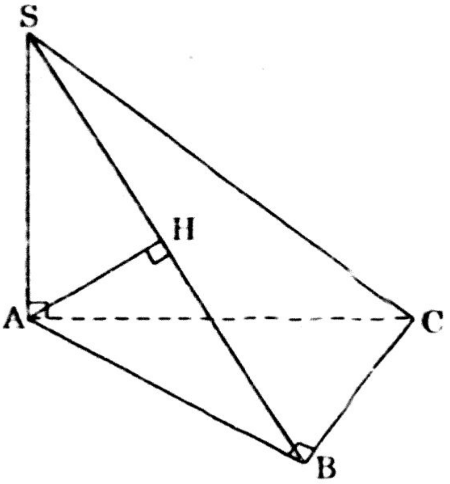
a) $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow$ $BC \perp SB$ (định lí 3 đường vuông góc).

$\left.\begin{array}{l} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow$ $BC \perp (SAB)$.

b) $\left.\begin{array}{l} BC \perp (SAB) \\ AH \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $BC \perp AH$.

$\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow$ $AH \perp (SBC)$.

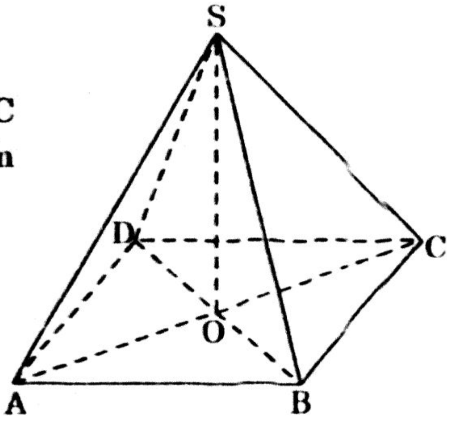
$\left.\begin{array}{l} AH \perp (SBC) \\ SC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $AH \perp SC$ (đpcm).



411 Cho hình thoi ABCD; O là giao điểm của hai đường chéo và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABCD). Biết SA = SC; SB = SD.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.



Hướng dẫn

a) O là trung điểm của AC, BD. Tam giác SAC cân tại đỉnh S nên SO vừa là trung tuyến vừa là đường cao. $SO \perp AC$ (1)

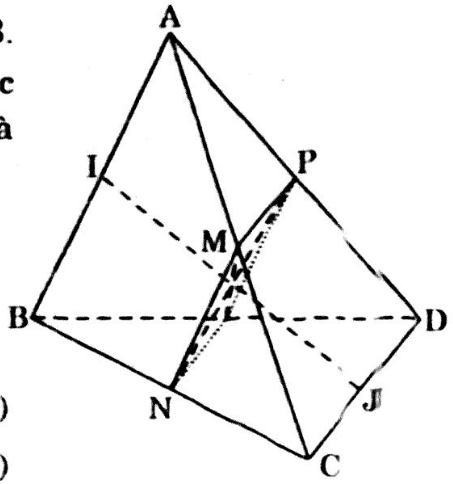
Tương tự, ta được : $SO \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) $\left.\begin{array}{l} DB \perp AC \\ DB \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow$ $BD \perp (SAC)$.

412 Cho tứ diện ABCD với CA = CB = DA = DB. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB; CD và M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh CA, CB, AD.

Chứng minh $IJ \perp (MNP)$.



Hướng dẫn

Từ giả thiết, ta chứng minh được

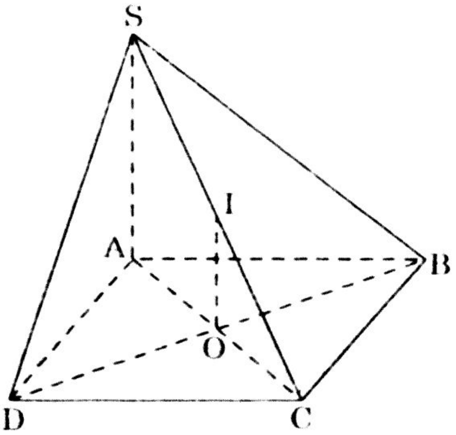
$IJ \perp CD$ mà $MP \,//\, CD$ $\Rightarrow$ $IJ \perp MP$ (1)

Tương tự $IJ \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

413 Cho hình chóp S.ABCD; đáy ABCD là hình vuông tâm O. SA ⊥ (ABCD) và I là trung điểm của cạnh SC.

Chứng minh OI ⊥ (ABCD).



Hướng dẫn

Ta có $\left.\begin{array}{l} OI \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ OI ⊥ (ABCD).

414 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông; SA ⊥ (ABCD). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SC, SD.

a) Chứng minh EF ⊥ (SAD).

b) Suy ra EF // (SAB).

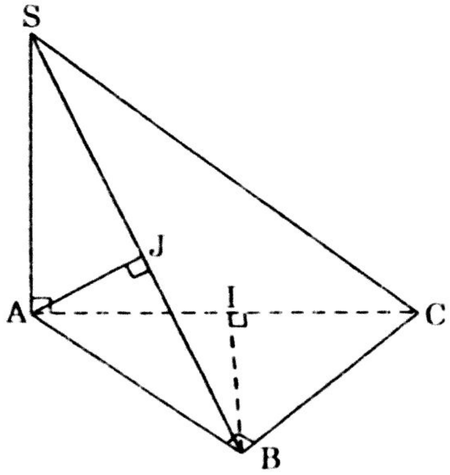
Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

415 Tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông cân tại đỉnh B. BA = BC = a, SA ⊥ (ABC) và SA = a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC và SB.

a) Chứng minh BI ⊥ (SAC).

b) Chứng minh AJ ⊥ (SBC).



Hướng dẫn

a) SA ⊥ (ABC) $\Rightarrow$ SA ⊥ BI

BI ⊥ AC

$\Rightarrow$ BI ⊥ (SAC).

b) $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp SB$

(định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB); \quad AJ \subset (SAB) \Rightarrow AJ \perp BC$

Tam giác SAB cân $\Rightarrow$ AJ ⊥ SB

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AJ \\ SB \perp AJ \end{array}\right\} \Rightarrow AJ \perp (SBC).$

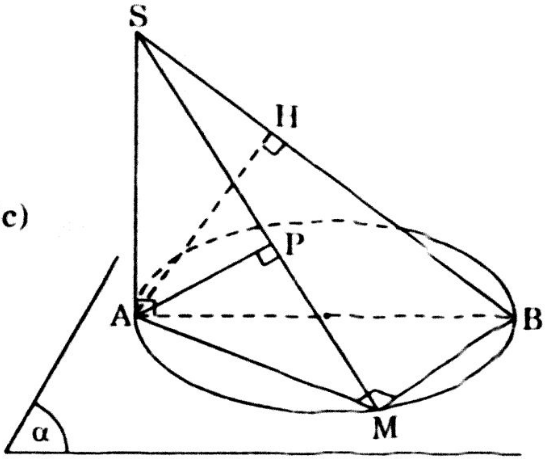
416 Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C), đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng vuông góc với α tại điểm A, ta lấy một điểm S sao cho SA = R; M là một điểm thuộc đường tròn (C).

a) H là hình chiếu của điểm A trên SB. Tính SH.

b) P là hình chiếu của A trên SM. Chứng minh $AP \perp (SMB)$.

Hướng dẫn

a) *Đáp số :* $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



b) $\left.\begin{array}{l} SA \perp \alpha \\ BM \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow \quad BM \perp SM$

(định lí 3 đường vuông góc)

$\left.\begin{array}{l} BM \perp AM \\ BM \perp SM \end{array}\right\} \Rightarrow \quad BM \perp (SAM)$

và do $AP \subset (SAM)$ nên

$BM \perp AP \qquad (1)$

Giả thiết cho $AP \perp SM \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

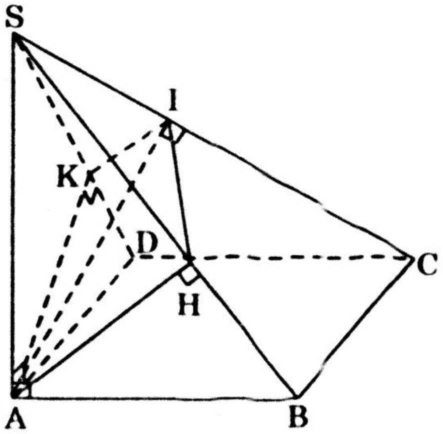
417 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông và mặt bên SAB, SAD vuông góc với mặt phẳng đáy. Từ đỉnh A kẻ $AH \perp SB$, $AI \perp SC$ và $AK \perp SD$.

a) Chứng minh $AH \perp (SBC)$ và $AK \perp SCD)$.

b) Chứng minh ba đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng (P) và $SC \perp (P)$.

Hướng dẫn

a) $\left.\begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SA \perp (ABCD)$



$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SB \perp BC;$

Kết hợp với $\quad BC \perp AB$

Suy ra $\quad BC \perp (SAB)$.

$BC \perp (SAB), \quad AH \subset (SAB) \quad \Rightarrow AH \perp BC$.

$\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Chứng minh tương tự, ta có $\quad AK \perp (SCD)$.

b) $AH \perp (SBC)$ và $SC \subset (SBC) \quad \Rightarrow AH \perp SC \qquad (1)$

$AK \perp (SDC)$ và $SC \subset (SDC) \quad \Rightarrow AK \perp SC \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AKH)$. Kết hợp với $AI \perp SC$ suy ra $AI \subset (AKH)$.

418 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là một tứ giác lồi nội tiếp được trong một đường tròn; AB = AD và CB = CD. Hai mặt bên SAB và SAD là hai tam giác cân, vuông góc ở B và D. Chứng minh :

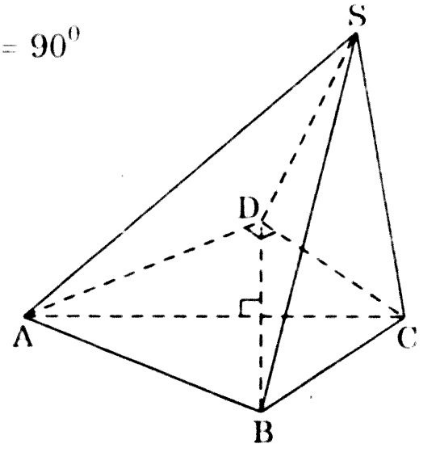
a) $AB \perp (SBC)$ **b)** $SC \perp (ABCD)$.

Hướng dẫn

a) Từ giả thiết ta có $\left.\begin{array}{l}\hat{B}+\hat{D}=180^0\\ \hat{B}=\hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}=90^0$

$\Rightarrow$ $AB \perp BC$; kết hợp với $AB \perp SB$

$\Rightarrow$ $AB \perp (SBC)$.



b) $AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SC$ (1)

Tương tự, ta có $AD \perp (SDC)$

$\Rightarrow AD \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

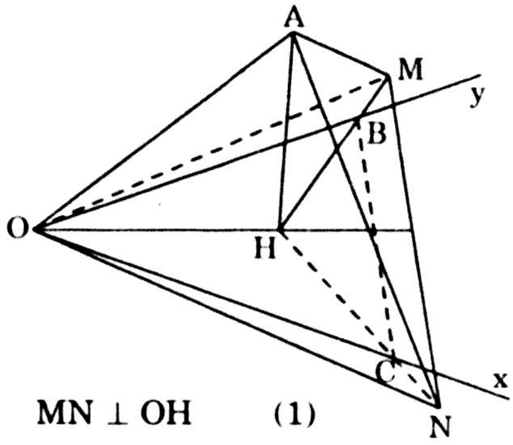
419 Trong mặt phẳng (P) cho một góc xOy và một điểm H không nằm trên các cạnh Ox, Oy. Từ H ta kẻ đường vuông góc với mp (P) và lấy trên đường thẳng này một điểm A. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OAx) cắt (P) tại N và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (OAy) cắt (P) tại M.

a) Chứng minh $OA \perp (AMN)$.

b) Chứng minh $OH \perp MN$.

c) Gọi B, C theo thứ tự là các giao điểm của HM với Oy; của HN với Ox. Chứng minh BC // MN.

Hướng dẫn



a) $AM \perp (OAx) \Rightarrow AM \perp OA$

Tương tự $AN \perp OA$

$\Rightarrow OA \perp (AMN)$.

b) $OA \perp (AMN) \Rightarrow OA \perp MN$

$AH \perp (Oxy) \Rightarrow AH \perp MN$

$\Rightarrow MN \perp (OAH) \Rightarrow MN \perp OH$ (1)

c) $AM \perp (OAx) \Rightarrow AM \perp Ox$

$AH \perp (Oxy) \Rightarrow AH \perp Ox$

$\Rightarrow Ox \perp (AHM) \Rightarrow Ox \perp HM$ hay $BH \perp OC$

Tương tự, ta có $CH \perp OB$

$\Rightarrow$ BH và CH là các đường thẳng chứa các đường cao của ΔOBC

$\Rightarrow$ H là trực tâm của ΔOBC, suy ra $OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \,//\, MN$.

420 Trong mặt phẳng (P), cho đường tròn đường kính AB; một điểm M thuộc đường tròn. Trên đường thẳng vuông góc với mp (P) tại A, lấy một điểm S.

a) Chứng minh $MB \perp SA$ và $MB \perp (SAM)$.

b) Kẻ đường cao AH của tam giác SAM. Chứng minh $AH \perp (SMB)$.

Hướng dẫn

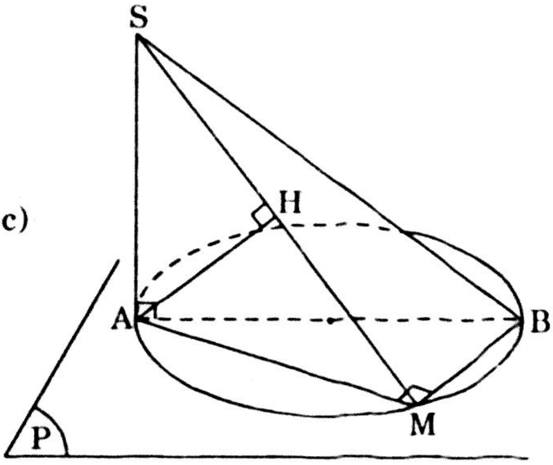
a)

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (P) \\ MB \subset (P) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SA \perp MB.$$

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (P) \\ AM \perp MB \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SM \perp MB$$

(định lí 3 đường vuông góc)

$$\left.\begin{array}{l} MB \perp SM \\ MB \perp AM \end{array}\right\} \Rightarrow \quad MB \perp (SAM)$$



b)

$$\left.\begin{array}{l} MB \perp (SAM) \\ AH \subset (SAM) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad MB \perp AH \quad (1)$$

Giả thiết cho $SM \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SMB)$.

421 Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và đôi một vuông góc với nhau. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh $BC \perp (OAH)$.

b) Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OB^2}$.

d) Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn.

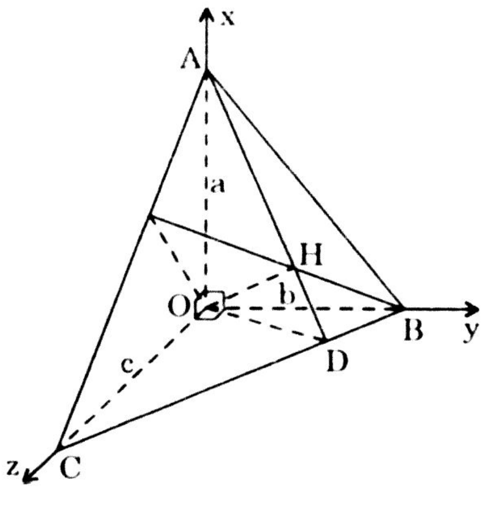
Hướng dẫn

a) Suy ra từ $BC \perp OA$ và $BC \perp OH$.

b) Chứng minh như câu a) để có $AC \perp (OBH) \Rightarrow BH \perp AC$.

c) Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OD^2}$

mà $\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



d) Đặt $OA = a,\ OB = b,\ OC = c$

$$\Rightarrow \quad BC^2 = b^2 + c^2$$
$$AB^2 = a^2 + b^2$$
$$AC^2 = a^2 + c^2$$

Từ $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} > 0$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} < 90^0.$$

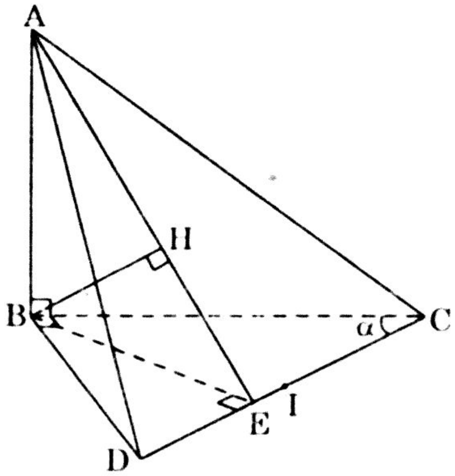
Với $\hat{B}$, $\hat{C}$ tương tự.

422 Trong mặt phẳng (P) cho tam giác BCD vuông góc tại đỉnh B, cạnh $CD = a$ và góc $\widehat{BCD} = \alpha$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại B, lấy một điểm A; $AB = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (ACD).

b) Gọi I là trung điểm của CD. Xác định giá trị của α để $CD \perp (ABI)$.

Hướng dẫn



a) Qua AB dựng mp (Q) ⊥ CD cắt CD ở E.

Trong mặt phẳng ABE kẻ $BH \perp AE$

$$\Rightarrow \quad BH \perp (ACD).$$

Sử dụng kết quả bài 421 ta có :

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BD^2}$$

$$\Rightarrow \quad BH = \frac{a \sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1 + \sin\alpha \cos\alpha}}.$$

b) $\alpha = 45^0$.

423 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O bán kính R; BC là một đường kính, OA là một bán kính vuông góc với BC. Đường trung trực của OA cắt đường tròn tại hai điểm E, F. Trên đường thẳng vuông góc với mp (P) tại A, lấy một điểm S.

a) Chứng minh $SO \perp EF$ và SA là trục của tam giác OEF.

b) Cho $SA = R\sqrt{2}$. Kẻ đường thẳng $Sz \perp (SBC)$. Chứng minh Sz thuộc mp (SOA) và Sz cắt (P) tại J. Tính AJ và chứng minh AB đi qua trung điểm của JG.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

424 Cho hình vuông ABCD, cạnh a và một điểm S không thuộc mặt phẳng (ABCD). Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp (SCD).

b) Tính khoảng cách từ tâm O của hình vuông đến mp (SCD).

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; **b)** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

425 Một tam giác đều có cạnh là 3a. Khoảng cách từ một điểm ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác đến mỗi đỉnh của tam giác là 2a. Tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng chứa tam giác.

Hướng dẫn

Đáp số : a.

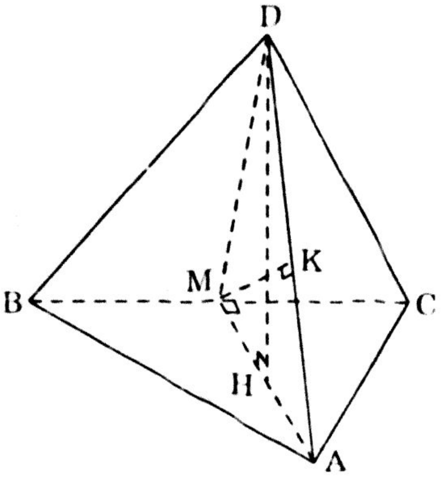
426 Cho tứ diện ABCD có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; AD = a và AD ⊥ BC. Khoảng cách từ đỉnh D đến cạnh BC là a. Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh BC ⊥ (ADM).

b) Tính chiều cao kẻ từ đỉnh D của tứ diện.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, BC.

Hướng dẫn



a) ΔABC đều $\Rightarrow AM \perp BC$.

Kết hợp với $AD \perp BC$ suy ra đpcm.

b) Do $BC \perp (ADM)$ nên nếu trong tam giác ADM kẻ $DH \perp AM$ thì $DH \perp (ABC) \Rightarrow$ DH là chiều cao của tứ diện kẻ từ D với các thông tin : AM = a; AD = a; DM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ta tính ra DH = $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

c) Trong tam giác ADM, kẻ $MK \perp AD \Rightarrow MK \perp BC$, $MK \perp AD$ cho ta MK là khoảng cách giữa hai đường thẳng AD, BC.

Ta có : MK = $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

427 Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; M và N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, A'B'.

a) Chứng minh AB $\perp$ (CMN).

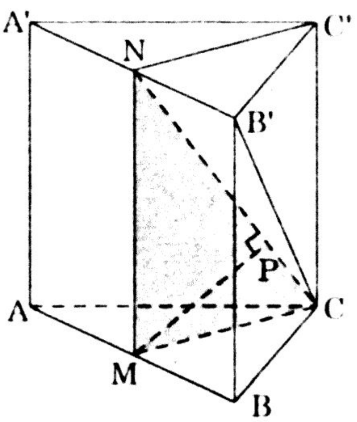
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB'.

Hướng dẫn

a) Độc giả tự chứng minh.

b) Mặt phẳng (CB'N) là mặt phẳng qua CB' và song song với AB.

Trong mp (CMN) kẻ MP $\perp$ CN thì MP $\perp$ (CB'N) và MP chính là khoảng cách giữa AB và CB'.



Trong tam giác vuông CMN với

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ta tính được đường cao MP theo công thức :

$$\frac{1}{MP^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{CM^2} \quad \Rightarrow \quad MP = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

428 Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông góc tại đỉnh C, CA = a, CB = $a\sqrt{3}$ và SA $\perp$ (ABC), SA = a; D là trung điểm của cạnh AB.

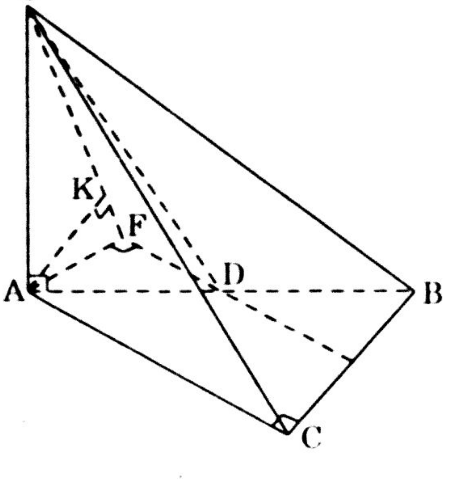
a) Tính góc nhọn φ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SD.

Hướng dẫn

a) Gọi E là trung điểm của CB, ta có DE // AC.

Ta tính $\widehat{SDE}$.



$AC = a, \ BC = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad AB = 2a.$

Từ đây ta tính được $SD = a\sqrt{2}$; $DE = \frac{a}{2}$

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 \quad \Rightarrow \quad AE^2 = \frac{7a^2}{4}$$

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 \quad \Rightarrow \quad SE^2 = \frac{11a^2}{4}.$$

Áp dụng định lí cosin vào tam giác SDE :

$SE^2 = SD^2 + DE^2 - 2SD.DE.\cos\widehat{SDE}$, ta tính ra

$$\cos\widehat{SDE} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\widehat{SDE} \approx -0{,}3536$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{SDE} \approx 110^0 42'.$$

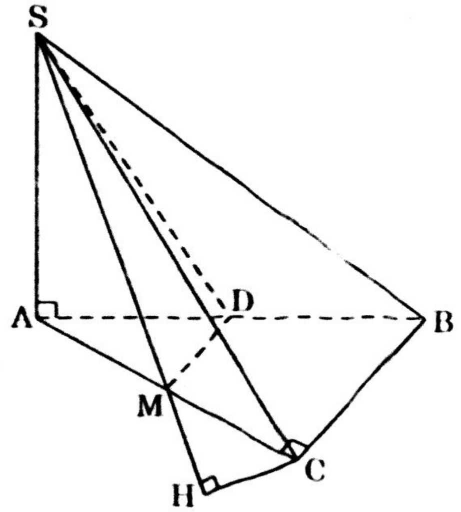
Suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và SD là $69^0 18'$.

Dễ thấy DE // AC ⇒ mặt phẳng (SDE) là mặt phẳng chứa SD và song song với AC. Từ A kẻ AF ⊥ DE, ta chứng minh được DE ⊥ (ASF). Trong mp (ASF) kẻ AK ⊥ SF ⇒ AK ⊥ (SDE) cho ta AK ⊥ SB ⇒ AK là khoảng cách giữa SD và AC.

$$AS = a; \quad AF = CE = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad SF = \frac{a}{2}.$$

Từ tam giác vuông SAF với đường cao AK ta tính được :

$$AK = a\sqrt{3}.$$



b) Gọi M là trung điểm của AC. Mặt phẳng (SDM) là mặt phẳng chứa SD và song song với BC.

Do DF ⊥ (SAC) ⇒ (SDM) ⊥ (SAC).

Hai mặt phẳng này giao nhau theo giao tuyến SM. Từ C kẻ CH ⊥ SM thì CH ⊥ (SDM) hay CH là khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Ta tính được CH = a.

429 Chứng minh rằng góc giữa các đường chéo của hình lập phương với các mặt bên của nó không phụ thuộc vào các đường chéo và cũng không phụ thuộc vào việc chọn mặt bên nào.

Hướng dẫn

Các góc đó đều bằng nhau và bằng $54^0 48'$.

430 Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', biết AB = a; BC = b; BB' = c với a < b < c.

a) Liệu góc giữa các đường chéo của nó với các mặt bên của hình hộp có phụ thuộc vào việc chọn mặt bên ?

b) Xét đường chéo BD'. Đường thẳng BD' tạo với mặt bên nào một góc nhỏ nhất, một góc lớn nhất ?

Hướng dẫn

a) Có phụ thuộc vào việc chọn mặt bên.

b) BD' tạo với các mặt bên ADD'A' và BCC'B' các góc nhỏ nhất và tạo với các mặt bên A'B'C'D' và ABCD các góc lớn nhất.

Chú ý : AB ⊥ (A'B'C'D') nên D'A là hình chiếu của D'B lên mp ADD'A'. Góc giữa D'B và (ADD'A') là $\widehat{AD'B}$.

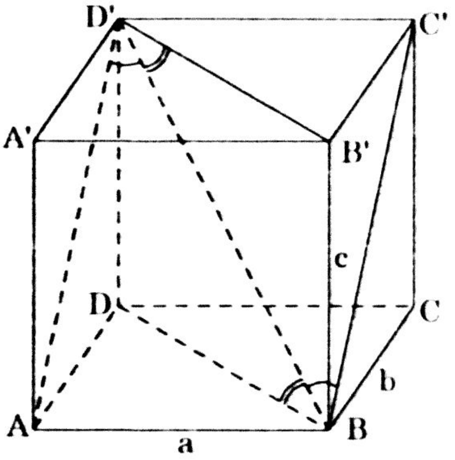
$$D'B = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sin \widehat{AD'B} = \frac{AB}{D'B} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Các góc mà D'B hợp với các mặt bên khác có $\widehat{D'BD}$ và $\widehat{D'BC}$

$$\sin \widehat{D'BD} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sin \widehat{D'BC} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Theo giả thiết a < b < c nên $\sin \widehat{AD'B} < \sin \widehat{D'BC} < \sin \widehat{D'BD}$

$$\Rightarrow \quad \widehat{AD'B} < \widehat{D'BC} < \widehat{D'BD}.$$

431 Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a) Tìm góc giữa AA', A'D' với mặt phẳng AB'D'.

b) Gọi M, N, O theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BB', CC' và tâm của hình vuông BCC'B'. Tìm góc giữa các đường thẳng DM; DO; DN với mp (BCC'B').

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $35^0 17'$. **b)** $41^0 49'$; $54^0 44'$ và $63^0 26'$.

432 Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB, cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc, I là trung điểm của cạnh AB.

a) Tính góc hợp bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD).

b) Tính góc hợp bởi mặt phẳng (SDC) và đường thẳng SI.

c) Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SDC).

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $37^0 45'$. **b)** $49^0 06'$. **c)** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

433 Cho lăng trụ lục giác đều ABCDEF.A'B'C'D'E'F' cạnh đáy a, chiều cao 4a.

a) Tính các đường chéo và góc tạo bởi các đường chéo với đáy.

b) Tính góc giữa đường chéo AD' và mặt bên CDD'C'.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $AD' = 2a\sqrt{5}$; $AC' = a\sqrt{19}$; $63^0 25'$ và $66^0 35'$.

b) $22^0 48'$.

434 Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A; AB = AC = a, H là trung điểm của BC và đỉnh S nằm trên trục của tam giác ABC.

Biết SA = SB = SC = a.

a) Tính góc giữa SA với mp (ABC).

b) Tính góc giữa SB và AC.

Hướng dẫn

a) Dễ thấy $SH \perp (ABC)$ nên góc giữa SA và mp (ABC) là góc $\widehat{SAH}$.

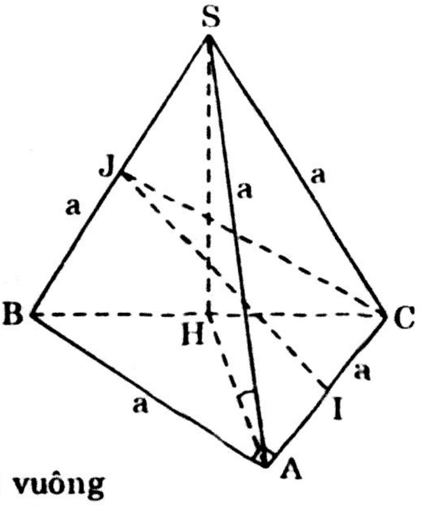
Trong tam giác vuông SHA ta có :

$$\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH}$$

Với $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan\widehat{SAH} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{SAH} \approx 50^0 45'.$$



b) Khoảng cách giữa SB và AC bằng độ dài đoạn vuông góc chung IJ. (I là trung điểm AC, J là trung điểm SB)

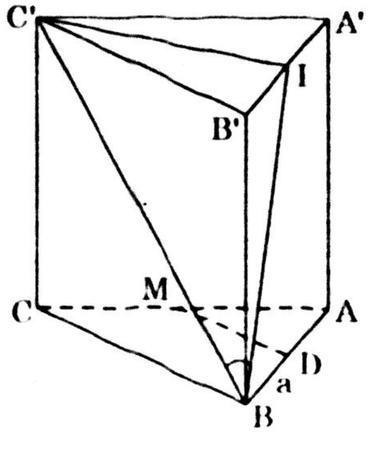
Ta có $CJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $CI = \dfrac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $IJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

435 Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', cạnh đáy bằng a. Đường chéo BC' của mặt bên BCC'B' tạo với mặt phẳng (ABB'A') một góc 30^0.

a) Tính AA'.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến mặt phẳng (ABB'A').

Hướng dẫn



a) Gọi I là trung điểm của A'B'. Ta có $\widehat{C'IB} = 30^0$

$C'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; tam giác vuông C'IB cho ta

$$C'B = \frac{C'I}{\sin 30^0} \Rightarrow C'B = a\sqrt{3}; \quad AA' = CC'$$

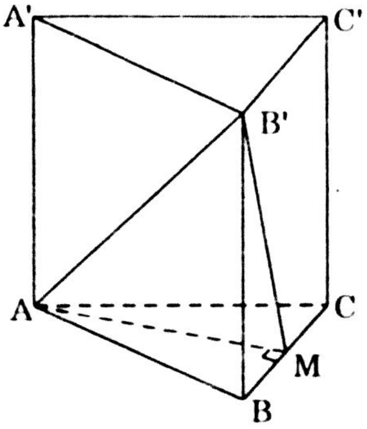
mà $CC'^2 = C'B^2 - CB^2 \Rightarrow CC' = a\sqrt{2}$.

b) *Đáp số* : $MD = \frac{a}{2}$.

436 Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', cạnh đáy bằng a, đường chéo AB' của mặt bên ABB'A' hợp với mặt phẳng (BCC'B') một góc φ.

a) Tính đường chéo AB'.

b) Tính cạnh bên của lăng trụ.



Hướng dẫn

a) Gọi M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC$.

Kết hợp với $(ABC) \perp (BCC'B')$

Suy ra $AM \perp (BCC'B')$

Góc giữa AB' và mp (BCC'B') là $\widehat{AB'M}$

hay $\widehat{AB'M} = \varphi$.

Trong tam giác vuông AMB' thì

$$AB' = \frac{AM}{\sin\varphi} \Rightarrow AB' = \frac{a\sqrt{3}}{2\sin\varphi}.$$

b) Ta có $BB'^2 = AB'^2 - AB^2 \Rightarrow BB' = \frac{a}{2\sin\varphi}\sqrt{3 - 4\sin^2\varphi}$.

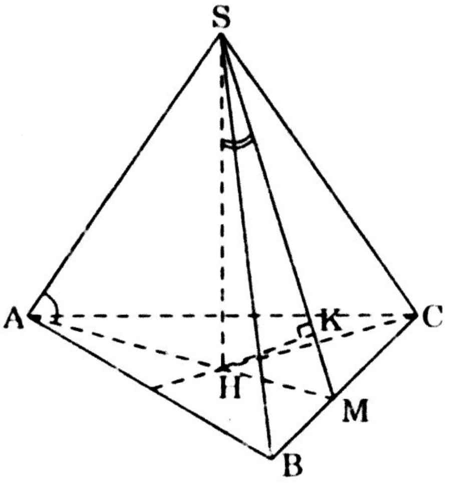
437 Cho tứ diện đều cạnh a. Tính :

a) Góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy.

b) Góc giữa đường cao và mặt bên.

Hướng dẫn

a) Góc giữa cạnh bên SA với mp đáy là $\widehat{SAH}$.



$$\cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA}$$

Với $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SA = a$

$$\Rightarrow \cos\widehat{SAH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$$

$$\Rightarrow \widehat{SAH} \approx 54^0 44'.$$

b) Trong mp (SHM) với M là trung điểm của BC, kẻ HK ⊥ SM, ta dễ dàng chứng minh được HK ⊥ (SBC).

Vậy góc giữa đường cao SH với mặt bên (SBC) là góc $\widehat{HSM}$.

$$\sin\widehat{HSM} = \frac{HM}{SM};\quad \text{với}\quad HM = \frac{a\sqrt{3}}{6};\quad SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad \sin\widehat{HSM} = \frac{1}{3}\quad \Rightarrow\quad \widehat{HSM} \approx 19^0 27'.$$

438 Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Đường cao SO tạo với mặt bên các góc 30^0.

a) Tính đường cao.

b) Tính các cạnh bên hình chóp.

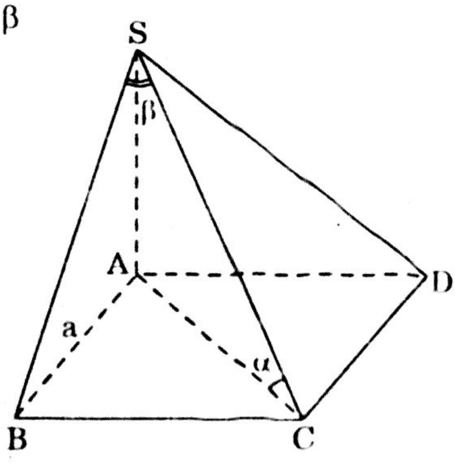
Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; **b)** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

439 Hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD cạnh AB = a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), cạnh SC tạo với mặt đáy một góc α và tạo với mặt bên SAB một góc β.

Chứng minh hệ thức : $SC^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

Hướng dẫn



Ta có SA ⊥ (ABCD) ⇒ $\widehat{SCA} = \alpha$

BC ⊥ (SAB) ⇒ $\widehat{BSC} = \beta$

BC = SC.sinβ

AC = SC.cosα

Kết hợp với $AB^2 = AC^2 - BC^2$

Suy ra đpcm.

440 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Một điểm A thuộc mp (P) và một điểm B thuộc mp (Q).

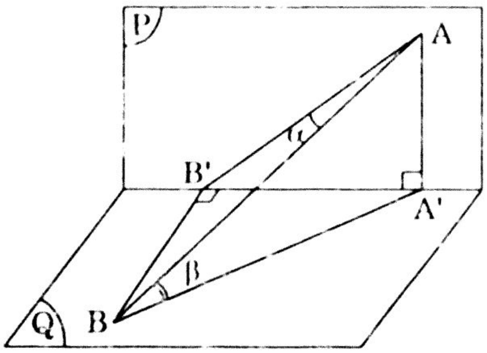
Gọi α là góc giữa đường thẳng AB với mp (P).

β là góc giữa đường thẳng AB với mp (Q).

a) Chứng minh $\alpha + \beta \le 90^0$.

b) Với điều kiện nào thì $\alpha + \beta = 90^0$.

Hướng dẫn



a) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Kẻ $AA' \perp d$ và $BB' \perp d$. Ta có :

$$AA' \perp (Q) \Rightarrow \widehat{ABA'} = \beta$$

$$BB' \perp (P) \Rightarrow \widehat{BAB'} = \alpha$$

$$\sin\beta = \frac{AA'}{AB} \qquad (1)$$

$$\sin\widehat{ABB'} = \frac{AA'}{AB} \qquad (2)$$

$$AB' \geq AA' \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\sin\beta \leq \sin\widehat{ABB'}$ (4)

Vì β và $\widehat{ABB'}$ đều nhọn nên từ (4) suy ra $\beta \leq \widehat{ABB'}$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha + \widehat{ABB'}$$

mà $\widehat{ABB'} + \alpha = 90^0 \Rightarrow \alpha + \beta \leq 90^0$.

b) Khi $AB \perp d$ thì A' và B' trùng nhau tại một điểm M thuộc d, lúc đó :

$$\widehat{MAB} = \alpha ; \quad \widehat{MBA} = \beta \quad \text{và} \quad \alpha + \beta = 90^0.$$

441 Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mp (ABCD) tại điểm A có một điểm S, biết $SA = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa các mặt phẳng :

a) (SAB) và (ABCD) **b)** (SBC) và (ABCD)

c) (SBD) và (ABCD) **d)** (SAB) và (SCD).

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** 90^0; **b)** $54^0 43'$; **c)** $54^0 43'$; **d)** $32^0 15'$.

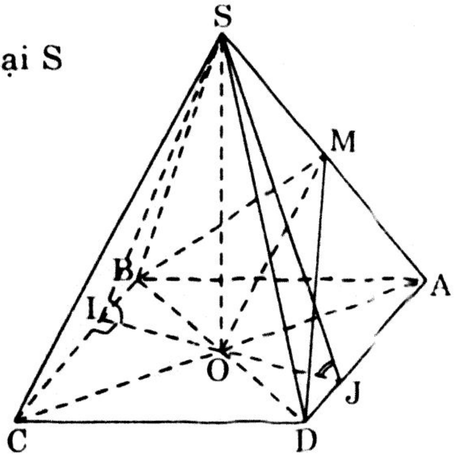
442 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh a, tâm O, đường chéo $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh $\widehat{ASC} = 90^0$. **b)** Chứng minh $(BSA) \perp (DSA)$.

c) Tính góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy.

Hướng dẫn

a) Từ BC = a; $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ta tính ra $OC = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.



Vì $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow$ ΔSAC vuông tại S

$\Rightarrow \widehat{ASC} = 90^0$.

b) $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow SB^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = a^2$

$\Rightarrow SB = a$

$\Rightarrow \Delta SBA$ cân tại B.

Gọi M là trung điểm của SA $\Rightarrow BM \perp SA$;

Tương tự, ta có $DM \perp SA$

$\Rightarrow \widehat{BMD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SDA).

Tam giác SOA vuông cân $\Rightarrow OM = \dfrac{1}{2}SO\sqrt{2} \Rightarrow OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $OM = \dfrac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta BMD$ vuông tại M. Suy ra $(BSA) \perp (DSA)$.

c) Kẻ $OI \perp BC \Rightarrow SI \perp BS$. Suy ra góc $\widehat{SIO}$ là góc giữa mặt bên SBC và đáy. Ta tính được $OI = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Ta có :

$$\tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{IO} \Rightarrow \tan\widehat{SIO} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\widehat{SIO} \approx 1{,}2248 \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 50^0 48'.$$

443 Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, cạnh a; $SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{3a}{2}$.

Tìm góc giữa các mặt phẳng (SAB) và (SAC); (SBC) và (ABC).

Hướng dẫn

Đáp số : 60^0.

444 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.

a) Tính góc giữa hai mặt bên kề nhau.

b) Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng mặt phẳng (ABE) tạo với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) các góc bằng nhau.

Hướng dẫn

a) *Đáp số* : $18^0 26'$. **b)** Độc giả tự giải.

445 Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và đôi một tạo với nhau các góc có số đo 60^0. Trên các tia Ox, Oy, Oz theo thứ tự ta lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC$.

a) Tính góc hợp bởi mặt phẳng (ABC) lần lượt với các mặt phẳng (OAB); (OBC); (OCA).

b) Tính góc hợp bởi các mặt phẳng :

(OAB) và (OAC); (OBC) và (OBA); (OAC) và (OBC).

Hướng dẫn

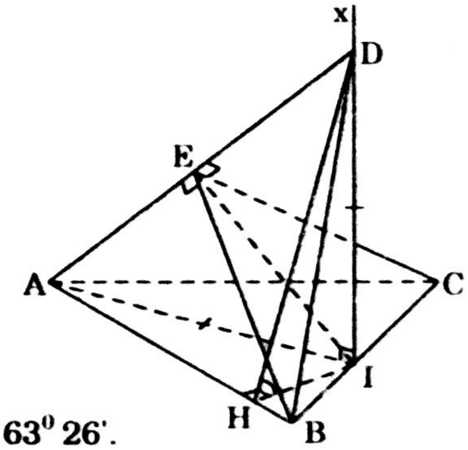
Đáp số : 45^0.

446 Cho tam giác đều ABC cạnh a. Từ trung điểm I của BC ta kẻ tia $Ix \perp (ABC)$ và lấy trên Ix một điểm D sao cho $ID = IA$.

a) Tính góc giữa hai mp (DAB) và (ABC).

b) Tính góc giữa hai mp (DAB) và (DAC).

Hướng dẫn



a) Kẻ $IH \perp AB$. Nối DH.

$\widehat{DHI}$ là góc giữa hai mp (DAB) và (ABC).

Ta có $$\tan\widehat{DHI} = \frac{DI}{IH}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\widehat{DHI} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}} = 2 \quad \Rightarrow \quad \widehat{DHI} \approx 63^0 26'.$$

b) Dễ thấy $BC \perp AD$. Qua BC dựng mp $(P) \perp AD$, cắt AD ở E; góc $\widehat{BEC}$ là góc giữa hai mp (DAB) và (DAC). Ta chứng minh được các tam giác DAB, DAC đều, suy ra E là trung điểm của AD.

$$\tan\widehat{BEI} = \frac{IB}{IE} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{BEI} \approx 39^0 12' \quad \Rightarrow \quad \widehat{BEC} \approx 78^0 24'.$$

Chú ý : Có thể tính $\widehat{BEC}$ từ tam giác EBC nhờ vào định lí cosin :

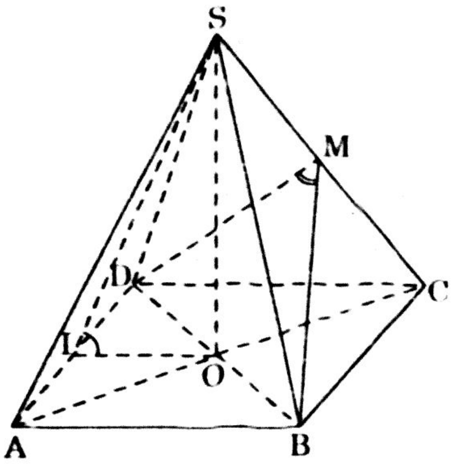
$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2BE.CE.\cos\widehat{BEC}$$

và ta được $\cos\widehat{BEC} \approx 0{,}20$.

447 Hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên bằng a.

a) Tính góc φ giữa các mặt bên với đáy.

b) Tính góc giữa các mặt bên.



Hướng dẫn

a) I là trung điểm của AD.

Góc $\widehat{SIO}$ là góc giữa các mặt bên với đáy.

Ta tính được $\tan\widehat{SIO} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \widehat{SIO} \approx 54^0 42'.$$

b) Gọi M là trung điểm của SC.

$\widehat{DMB}$ là góc giữa hai mặt bên kề nhau.

$$BM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \qquad DB = a\sqrt{2}$$

Áp dụng định lí cosin vào tam giác BMD ta tính được

$$\cos\widehat{DMB} = -\frac{1}{3} \approx -0{,}3333 \Rightarrow \quad \widehat{DMB} \approx 109^0 30'.$$

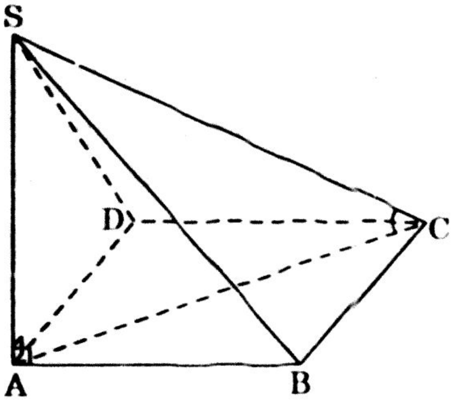
Chú ý : Từ kết quả này, suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SDC) và (SBC) là $70^0 30'$.

448 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, BC = 2a. Hai mặt bên SAB và SAD vuông góc với mp (ABCD); cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0.

a) Tính đường cao hình chóp.

b) Tính góc giữa các mặt bên (SBC), (SCD) hợp với mặt đáy.

Hướng dẫn



a) Ta có $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow \quad \widehat{SCA} = 60^0$

$SA = AC.\tan 60^0$

$\Rightarrow \quad SA = a\sqrt{15}$

b) $\widehat{SBA}$ là góc giữa mp (SBC) với mặt đáy

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB}$$

$\Rightarrow \quad \tan\widehat{SBA} = 15 \quad \Rightarrow \quad \widehat{SBA} \approx 75^0 30'$

Tương tự, ta có $\quad \widehat{SDA} \approx 62^0 42'$.

449 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a.

a) Tính góc giữa các mặt bên hợp với mặt phẳng đáy.

b) Tính góc giữa hai mặt bên (SBC) và (SDC).

c) Tính góc giữa cạnh SC và mặt phẳng đáy.

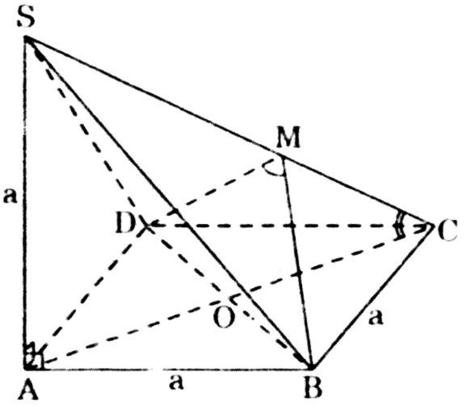
Hướng dẫn

a) Hai mặt bên (SAB) và (SAD) hợp với đáy các góc 90^0.

$\widehat{SBA}$ là góc giữa mặt bên (SBC) và đáy.

Ta có $\widehat{SBA} = 45^0$;

Tương tự $\widehat{SDA} = 45^0$.



b) Do BD ⊥ SC nên qua BD dựng mp (P) vuông góc với SC, cắt SC ở M; DM ⊥ SC, BM ⊥ SC.

$\Rightarrow \widehat{BMD}$ là góc giữa hai mặt bên SBC và SDC.

Ta có $BM = DM = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $BD = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác BMD ta tính ra

$$\cos\widehat{BMD} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{BMD} = 120^0$$

Chú ý : Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) là 60^0.

c) Do SA ⊥ (ABCD) ⇒ $\widehat{SCA}$ là góc giữa SC và mp đáy.

Ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} \Rightarrow \tan\widehat{SCA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} \approx 32^0\,16'.$$

450 Cho tam giác ABC cân, $AB = AC = a\sqrt{5}$; BC = 4a. Trên nửa đường thẳng vuông góc với mp (ABC) tại A, ta lấy điểm D sao cho AD = h.

a) Xác định giá trị h để tam giác DBC là tam giác vuông.

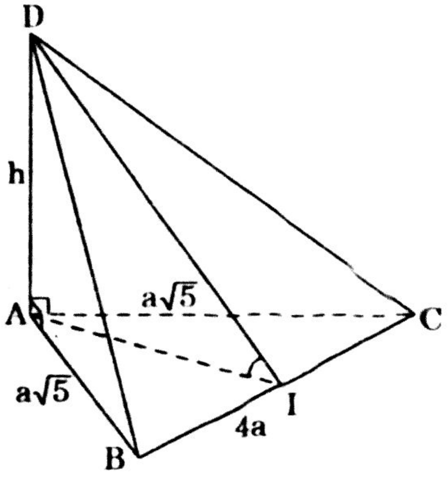
b) Cho $h = a\sqrt{3}$. Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Hướng dẫn

a) Ta có $DB = DC = \sqrt{h^2 + 5a^2}$.

Tam giác DBC chỉ có thể vuông tại D nên để tam giác DBC vuông thì

$$BC^2 = DB^2 + DC^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = a\sqrt{3}.$$



b) I là trung điểm của BC

$\Rightarrow DI \perp BC$ và $AI \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{AID}$ là góc giữa mặt (DBC) và đáy (ABC).

Với $h = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad DI = 2a.$

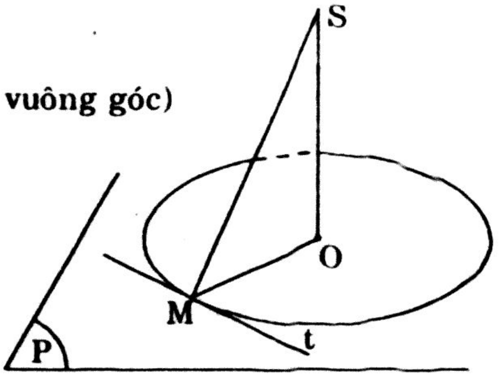
$$\sin\widehat{AID} = \frac{DA}{DI}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\widehat{AID} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \widehat{AID} = 60^0.$$

$\boxed{451}$ Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (O) và một điểm M thuộc đường tròn. Kẻ tiếp tuyến Mt với đường tròn (O). Trên đường thẳng vuông góc với (P), đi qua tâm O, ta lấy một điểm S.

Chứng minh mp (S; Mt) ⊥ mp (SOM).

Hướng dẫn



$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (P) \\ OM \perp Mt \end{array}\right\} \Rightarrow Mt \perp MS \text{ (định lí 3 đường vuông góc)}$$

$$\left.\begin{array}{l} MS \perp Mt \\ OM \perp Mt \end{array}\right\} \Rightarrow Mt \perp (SOM) \qquad (1)$$

Ta lại có $\quad Mt \subset (S; Mt) \qquad (2)$

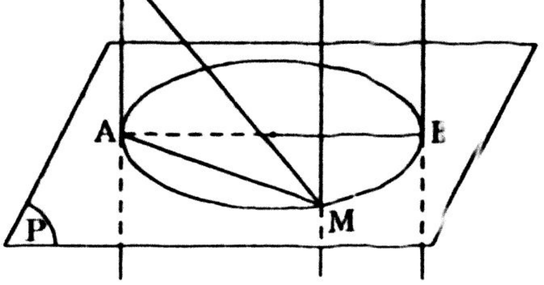
Từ (1) và (2) suy ra $(S; Mt) \perp (SOM)$.

$\boxed{452}$ Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính AB và một điểm M thuộc đường tròn. Kẻ hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với mp (P) theo thứ tự tại các điểm A, B.

a) Chứng minh (M, Δ) ⊥ (M, Δ').

b) Lấy một điểm C trên Δ. Chứng minh hai mặt phẳng (CMA) và (CMB) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn



a) $$\left.\begin{array}{l} (M,\Delta) \perp (P) \\ (M,\Delta') \perp (P) \\ (M,\Delta) \cap (M,\Delta') = d \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P).$$

$\Rightarrow d \perp MA$ và $d \perp MB$

$\Rightarrow \widehat{AMB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (M; Δ) và (M; Δ') $\qquad$ (1)

Ta lại có $MA \perp MB \Rightarrow \widehat{AMB} = 90^0$ (2)

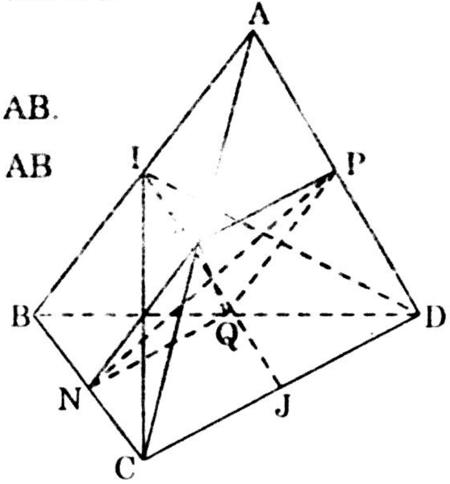
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) Dễ thấy $BM \perp (CMA)$ và $BM \subset (CMB)$, suy ra đpcm.

453 Cho tứ diện ABCD với $CA = CB = DA = DB$. Gọi I, J, M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, CA, CB và AD.

a) Chứng minh $IJ \perp (MNP)$

b) Suy ra $(ABJ) \perp (MNP)$ và $(CDI) \perp (MNP)$.



Hướng dẫn

a) $CB = CA \Rightarrow \Delta ABC$ cân $\Rightarrow CI \perp AB$.

$DA = DB \Rightarrow \Delta ADB$ cân $\Rightarrow DI \perp AB$

$$\Rightarrow AB \perp (CID) \Rightarrow \left.\begin{matrix} AB \perp IJ \\ NM \perp IJ \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow IJ \perp MN \quad (1)$$

Tương tự, ta có $IJ \perp MP$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

b) $IJ \perp (MNP)$ mà $(ABJ) \supset IJ \Rightarrow (ABJ) \perp (MNP)$

Tương tự, ta có $(CDI) \perp (MNP)$.

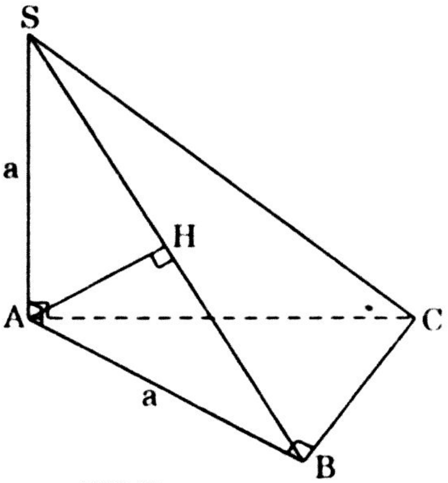
454 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh B, $AB = a$. Trên đường thẳng vuông góc với mp (ABC) lấy một điểm S, $SA = a$.

a) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC)

c) Tính góc hợp bởi đường thẳng SB và mp (ABC).

Hướng dẫn



a) $$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABC) \\ CB \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp SB$$

(định lí 3 đường vuông góc)

$$\left.\begin{matrix} CB \perp SB \\ CB \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp (SAB)$$

mà $(SBC) \supset CB$

nên $(SAB) \perp (SBC)$.

b) Vì $(SBC) \perp (SAB)$ nên nếu kẻ $AH \perp SB$ thì $AH \perp (SBC)$ và AH là khoảng cách từ A đến mp (SBC).

Ta tính được $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) *Đáp số :* 45^0.

455 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A; AB = 2a, AC = a. Một điểm S nằm ngoài mp (ABC). Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{2}$. Gọi O là trung điểm của cạnh đáy BC.

a) Chứng minh (SBC) ⊥ (ABC).

b) Tính góc hợp bởi đường thẳng SA và mp (ABC).

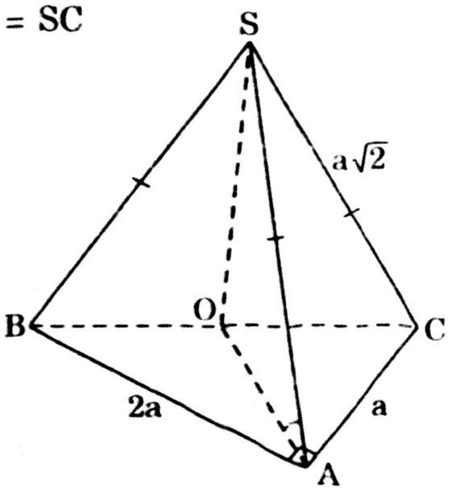
Hướng dẫn

a) Từ S kẻ SH ⊥ (ABC), từ giả thiết SA = SB = SC suy ra các tam giác vuông

$$\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$$

$$\Rightarrow \quad HA = HB = HC$$

hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABCD. Nhưng tam giác ABC vuông tại A nên tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC chính là trung điểm O của cạnh huyền BC, cho ta H trùng với O hay $SO \perp (ABC)$.



Kết hợp với $SO \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (ABC)$.

b) $SO \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAC}$.

Ta có $OA = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $SA = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}7906 \quad \Rightarrow \quad \widehat{SAO} \approx 37^0\,45'.$$

456 Cho đường tròn tâm (O) nằm trong mp (P); AB là một dây cung của đường tròn, I là trung điểm của AB; S là một điểm nằm trên đường vuông góc với mp (P) kẻ qua điểm O.

Chứng minh (SAB) ⊥ (SOI).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

457 Cho hình vuông ABCD và tam giác cân SAB nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

a) Chứng minh mp (SAD) ⊥ mp (SAB).

b) Gọi I là trung điểm của cạnh AB, K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh mp (SCK) ⊥ mp (SID).

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

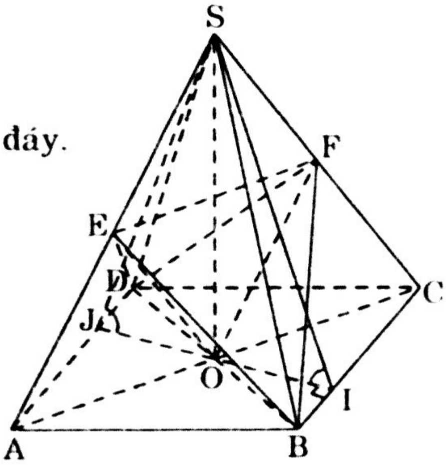
458 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc nhọn $\widehat{A} = 60^0$, cạnh bên SB = a. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

a) Chứng minh hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là tâm của đường tròn nội tiếp trong hình thoi.

b) Chứng minh tam giác SAC vuông.

c) E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SA, SC. Chứng minh (BED) ⊥ (BFD).

Hướng dẫn



a) Kẻ SO ⊥ (ABCD). Từ O kẻ OI ⊥ BC

$\Rightarrow$ SI ⊥ BC và $\widehat{SIO}$ là góc giữa mặt bên với đáy.

Do các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau, ta chứng minh, dựa vào các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông để có điểm O cách đều bốn cạnh của hình thoi.

b) Từ giả thiết ta tính ra :

$$DB = a; \qquad AC = a\sqrt{3}$$

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 \quad \Rightarrow \quad SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do $SO = \frac{1}{2}AC \quad \Rightarrow \quad \Delta SAC$ vuông tại S.

c) Ta tính được : $OF = OE = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad EF = \frac{1}{2}AC \quad \Rightarrow \quad EF = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vì $OF^2 + OE^2 = EF^2$ nên theo định lí đảo của định lí Pitago ta có :

$$OE \perp OF \qquad (1)$$

Mặt khác, dễ thấy DB ⊥ OE và DB ⊥ OF nên $\widehat{EOF}$ là góc giữa hai mặt phẳng (BED) và BFD) (2)

Từ (1) và (2) suy ra dpcm.

459 Cho tứ diện ABCD có các mặt bên ABD và ACD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (BCD). Gọi DE, BK là các đường cao của tam giác BCD và BF là đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh : $(ADE) \perp (ABC)$ và $(BKF) \perp (ABC)$.

b) Gọi H và N theo thứ tự là các giao điểm của AE với BF và của DE với BK. Chứng minh rằng $\widehat{NBH}$ là góc giữa đường thẳng BK và mặt phẳng (ABC).

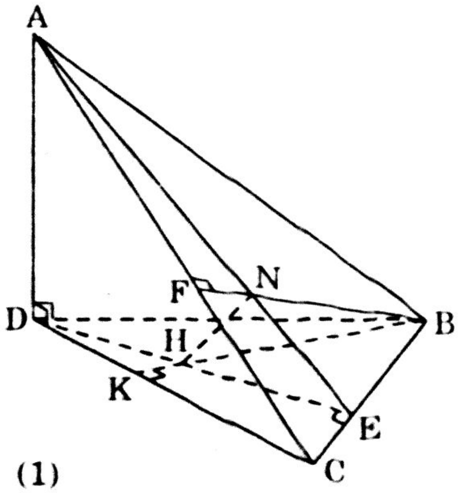
Hướng dẫn

a)
$$\left.\begin{array}{l}(ABD) \perp (BCD)\\(ACD) \perp (BCD)\end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (BCD)$$

$$\left.\begin{array}{l}AD \perp (BCD)\\DE \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow AE \perp BC \text{ (định lí 3 đường vuông góc)}$$

Suy ra $BC \perp (ADE)$ mà $BC \subset (ABC)$ suy ra $(ADE) \perp (ABC)$.

Với $(BKF) \perp (ABC)$ chứng minh tương tự.



b) Ta có $AD \perp (DBC) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AD \perp BK\\DC \perp BK\end{array}\right\}$

$$\Rightarrow BK \perp (ADC)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}BK \perp AC\\BF \perp AC\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BKF)$$

mà $NH \subset (BKF)$ Suy ra $NH \perp AC$ (1)

Mặt khác, $BC \perp (ADE)$ và $NH \subset (ADE)$ nên

$$NH \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $NH \perp (ABC)$ hay BN là hình chiếu của BH trên mp (ABC), suy ra đpcm.

460 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a; $SA = SB = SC = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Chứng minh : $(SAC) \perp (ABCD)$; $(SDB) \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD.

Chứng minh : $(SAB) \perp (SCD)$.

c) Tính khoảng cách từ tâm O của hình vuông đến mp (SAB).

Hướng dẫn

a) $SA = SB = SC = SD \Rightarrow$ chân đường cao hình chóp trùng với tâm O của đáy; $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra đpcm.

b) $SI^2 = SJ^2 = \dfrac{2a^2}{4} \Rightarrow SI^2 + SJ^2 = a^2 = IJ^2$

$\Rightarrow \Delta ISJ$ vuông tại S $\Rightarrow SI \perp SJ$ (1)

$SI \perp AB$ và $AB \parallel CD \Rightarrow SI \perp CD$ (2)

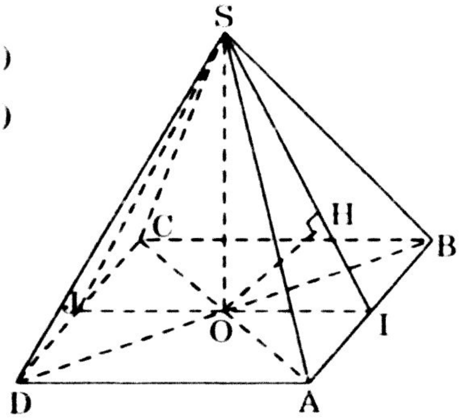
Từ (1) và (2) suy ra $SI \perp (SCD)$

Kết hợp với $SI \subset (SAB)$

suy ra đpcm.

c) Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$

Ta tính được $OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.



$\boxed{\textbf{461}}$ Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 60^0$; $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; SH là chiều cao của hình chóp.

a) Tính SH và SC theo a.

b) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$.

c) Chứng minh tam giác SBC là tam giác vuông.

d) Tính góc giữa mặt phẳng (SBD) và đáy.

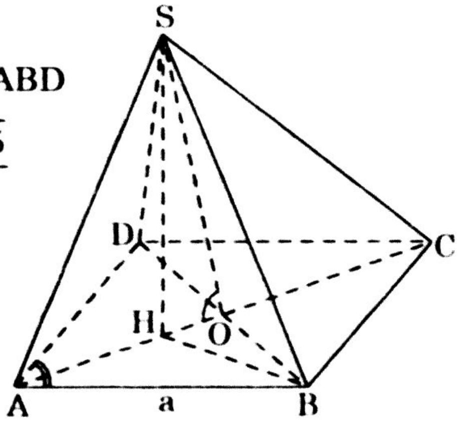
Hướng dẫn

a) H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đều ABD

$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

$AC = a\sqrt{3} \Rightarrow HC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SC = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$



b) $\left.\begin{array}{l} DB \perp AC \\ DB \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} DB \perp (SAC) \\ DB \subset (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$

c) Dễ thấy $\widehat{HBC} = 90^0 \Rightarrow HB \perp BC$

$\left.\begin{array}{l} SH \perp (ABCD) \\ HB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

d) Dễ thấy $SO \perp DB$ và $HO \perp DB \Rightarrow \widehat{SOH}$ là góc giữa (SBD) và đáy.

$$\tan\widehat{SOH} = \frac{SH}{OH} \quad\Rightarrow\quad \tan\widehat{SOH} = \sqrt{5} \approx 2,2361$$

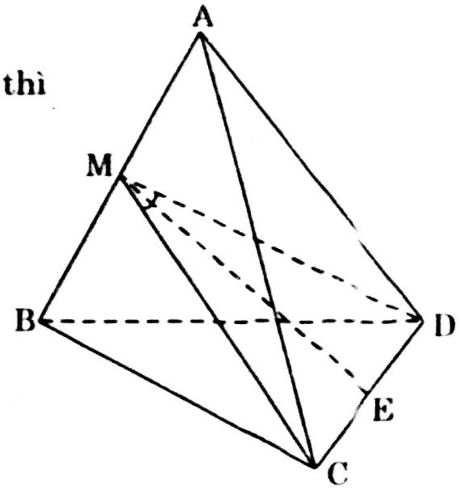
$$\Rightarrow\quad \widehat{SOH} \approx 65^0\,54'.$$

462 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.

a) Tính góc hợp bởi hai mặt bên (ABC) và (ABD).

b) Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng mặt phẳng (ABE) tạo với hai mặt (ABC) và (ABD) các góc bằng nhau.

Hướng dẫn



a) Dễ thấy, nếu gọi M là trung điểm cạnh AB thì

$$DM \perp AB; \qquad CM \perp AB.$$

Áp dụng định lí cosin vào ΔDMC với

$$CM = DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad CD = a$$

$$\Rightarrow \quad \cos\widehat{DMC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{DMC} \approx 70^0\,30'$$

Vì $\widehat{DMC} < 90^0$ nên $\widehat{DMC}$ cũng là góc giữa hai mp (ABC) và (ABD).

b) Ta cũng có $EM \perp AB \quad\Rightarrow\quad \widehat{CME}$ là góc giữa (ABC) và (ABE)

$\widehat{DME}$ là góc giữa (ABD) và (ABE)

mà $\widehat{CMD} = \widehat{DME}$ suy ra đpcm.

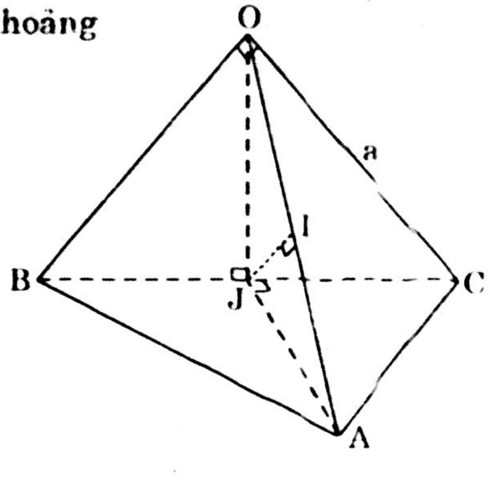
463 Cho tứ diện OABC có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{BOC} = 90^0$, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh OA, BC.

a) Chứng minh ABC là tam giác vuông.

b) Chứng minh IJ là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

c) Chứng minh $(ABC) \perp (OBC)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

Hướng dẫn



a) Ta có $\quad BC = a\sqrt{2}, \quad AB = AC = a$

$$\Rightarrow \quad \Delta ABC \text{ vuông ở A.}$$

b) $OJ \perp BC, \quad AJ \perp BC \quad\Rightarrow\quad BC \perp (OAJ)$

$$\Rightarrow \quad BC \perp IJ \qquad (1)$$

Ta cũng có $AJ = OJ \Rightarrow \Delta AJO$ cân tại J $\Rightarrow IJ \perp OA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

c) Ta có $OJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OA = a$

$\Rightarrow \Delta OJA$ vuông tại J; do $OJ \perp BC$, $AJ \perp BC$ và $\widehat{OJA} = 90^0$

$\Rightarrow$ mp (ABC) $\perp$ mp (OBC)

Ta tính được $IJ = \dfrac{a}{2}$.

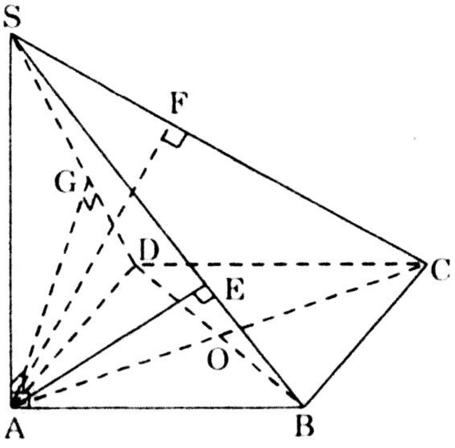
464 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tâm O, cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD); E, F, G theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các đường thẳng SB, SC, SD.

a) Xác định hình dạng các mặt bên của hình chóp.

b) Chứng minh (SAB) $\perp$ (SBC); và (SAD) $\perp$ (SCD).

c) Bốn điểm A, E, F, G đồng phẳng và (SAC) $\perp$ (AEFG).

Hướng dẫn



a) Sử dụng định lí 3 đường vuông góc. Các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b) $BC \perp (SAB)$ và $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$.

Tương tự, $CD \perp (SAD)$ và $CD \subset (SCD)$.

Suy ra đpcm.

$BC \perp (SAB)$ và $AE \subset (SAB)$

$\Rightarrow AE \perp BC$ (1)

$AE \perp SB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$ (3)

Tương tự, ta có $AG \perp SC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SC \perp (AEG)$ kết hợp với $AF \perp SC$

Suy ra $AF \subset (AEG) \Rightarrow$ A, E, F, G đồng phẳng.

$SC \perp (AEGF)$ mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (AEGF)$.

465 Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau và giao nhau theo giao tuyến Δ. Trên Δ có hai điểm A, B. Trong mặt phẳng (P) vẽ hình chữ nhật ABCD. Trong mặt phẳng (Q) vẽ nửa đường tròn đường kính AB và lấy một điểm S thuộc nửa đường tròn ấy.

a) Chứng minh : (SAD) ⊥ (SAB); (SBC) ⊥ (SAB).

b) Chứng minh các tam giác SAC và SBD đều là tam giác vuông.

c) Chứng minh (SAD) ⊥ (SBC).

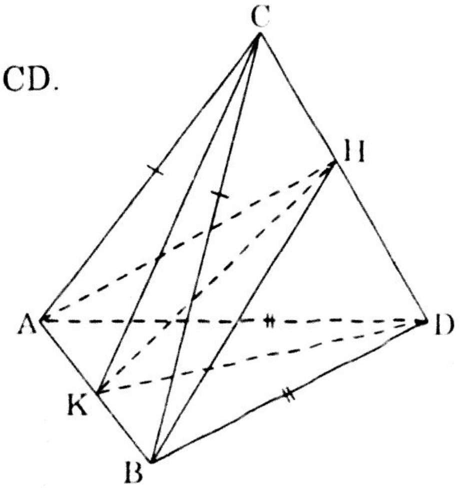
Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

466 Cho hai tam giác cân ABC và ABD không đồng phẳng và chung đáy AB.

a) Chứng minh AB ⊥ CD.

b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB, CD.



Hướng dẫn

a) Gọi K là trung điểm của cạnh đáy AB.

ΔABC cân ⇒ CK ⊥ AB

ΔABD cân ⇒ DK ⊥ AB

⇒ AB ⊥ (CKD)

⇒ AB ⊥ CD.

b) Vì AB ⊥ CD nên qua AB ta có thể dựng một mp (P) vuông góc với CD; mp (P) cắt CD tại H.

AB ⊥ (CKD) ⇒ AB ⊥ KH

CD ⊥ (AHB) ⇒ CD ⊥ KH

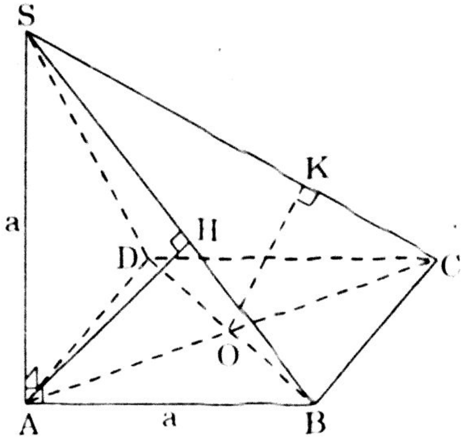
⇒ KH là đoạn vuông góc chung của AB, CD.

467 Cho hình vuông ABCD, cạnh a; SA ⊥ (ABCD) và SA = a.

Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :

a) SB và AD **b)** SB và CD **c)** DB và SC.

Hướng dẫn



a) Trong tam giác SAB kẻ AH ⊥ SB

⇒ AH ⊥ AD và AH ⊥ SB

⇒ AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

Tam giác ASB vuông cân tại đỉnh S

do vậy $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Đoạn vuông góc chung của SB và DC chính là đoạn thẳng BC, BC = a.

c) Từ tâm O của hình vuông, kẻ OK ⊥ SC (1)

$$DB \perp (SDB) \Rightarrow DB \perp OK \qquad (2)$$

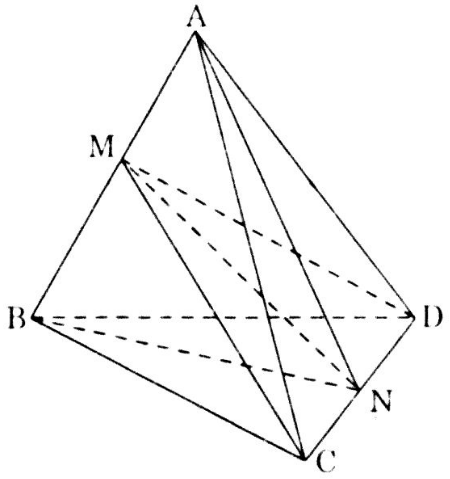
Từ (1) và (2) suy ra OK là đoạn vuông góc chung của SC và DB.

$$\Delta CSA \backsim \Delta COK \Rightarrow \frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC}$$

Với $SA = a$; $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SC = a\sqrt{3}$.

Ta tính được $OK = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

468 Cho tứ diện ABCD có AB = CD; BC = AD và AC = BD. Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AB, CD. Chứng minh MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.



Hướng dẫn

$\Delta ADC = \Delta BCD$ (c-c-c) $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{BCN}$.

Kết hợp với AD = BC và ND = NC

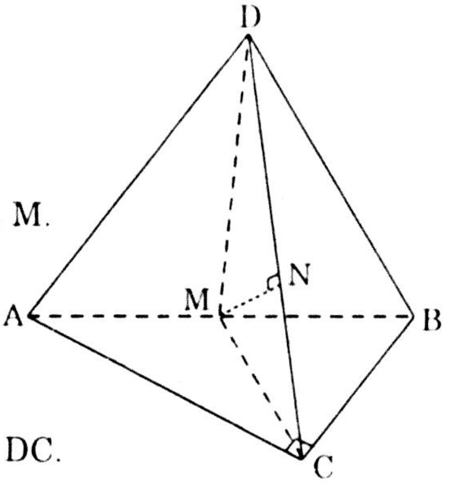
$\Rightarrow \Delta AND = \Delta BCN \Rightarrow NA = NB$

$\Rightarrow \Delta ANB$ cân $\Rightarrow NM \perp AB$ (1)

Tương tự, ta có $MN \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

469 Tứ diện ABCD, mặt đáy ABC là tam giác vuông có CA = CB = a. Các cạnh bên DA = DB = DC = b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.



Hướng dẫn

Gọi M là trung điểm của AB.

DA = DB = DC

⇒ Hình chiếu của D trên mp (ABC) là điểm M.

$DM \perp (ABC)$

$\Rightarrow (DMC) \perp (DAB)$.

Trong mp (DMC) kẻ $MN \perp DS$

⇒ MN là đoạn vuông góc chung giữa AB và DC.

Ta tính được $MN = \frac{a\sqrt{2b^2 - a^2}}{2b}$.

470 Hình chóp S.ABC, trong đó SA = SB = SC = a và các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

Dựng và tính đoạn vuông góc chung của :

a) SA và BC **b)** AI và SC

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

471 Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D'. Đường chéo AC' = a hợp với mặt bên một góc α. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của AC' và BB'.

Hướng dẫn

Đáp số : $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

472 Hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{A} = \alpha$. Đường chéo AC' tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng A'C và BB'.

Hướng dẫn

Đáp số : $a\sin\frac{\alpha}{2}$.

473 Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với mp (P) tại A, ta lấy một điểm S; SA = $a\sqrt{2}$.

a) Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SC và AB.

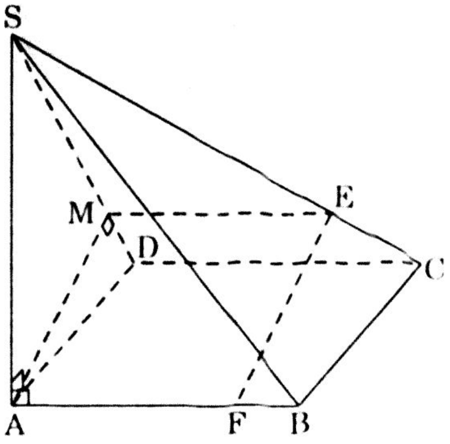
b) Tính độ dài đoạn vuông góc chung trên đây theo a.

Hướng dẫn

a) *Cách dựng :*

- Kẻ AM ⊥ SD
- Qua M kẻ đường thẳng song song với DC, cắt SC ở E.
- Kẻ qua E đường thẳng song song với AM, cắt AB ở EF.

EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.



b) *Đáp số :* EF = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

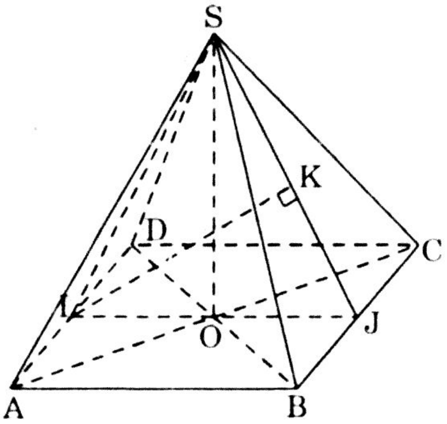
474 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a.

$SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC.

a) Chứng minh $(SIJ) \perp (SBC)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Hướng dẫn



a) Vì các cạnh bên bằng nhau nên ta chứng minh được $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm của hình vuông ABCD và ba điểm I, O, J thẳng hàng.

$$\left.\begin{matrix} BC \perp IJ \\ BC \perp SJ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad BC \perp (SIJ)$$

$$BC \subset (SBC)$$

$$\Rightarrow \quad (SIJ) \perp (SBC).$$

b) Mặt phẳng (SBC) chứa SB và song song với AD.

Hai mặt phẳng (SIJ) và (SBC) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến SJ và từ I kẻ $IK \perp SJ$ thì $IK \perp (SIJ)$ và IK là khoảng cách giữa AD và SB.

Ta có $\quad IK.SJ = SO.IJ$

Với $\quad SJ^2 = SC^2 - JC^2 \Rightarrow \quad SJ^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad SJ = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 \Rightarrow \quad SO^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$IJ = a$$

Ta tính được $\quad IK = \dfrac{a\sqrt{42}}{4}$.

475 Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông góc tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a và SA = a, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh các tam giác SBC, SCD là các tam giác vuông.

b) Dựng và tính đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Hướng dẫn

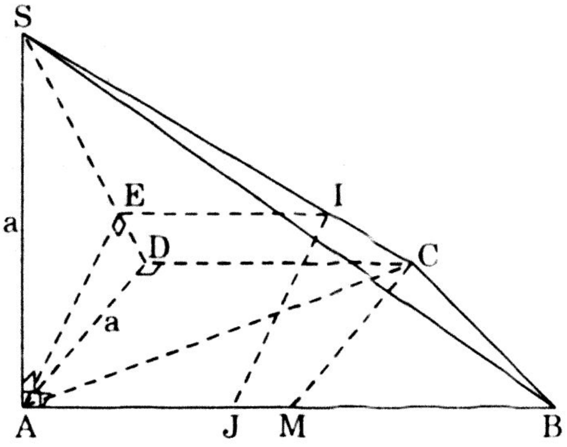
a) Gọi M là trung điểm của AB.

$\Rightarrow \quad CM = AM = BM = a \quad \Rightarrow \quad \Delta ACB$ vuông tại C.

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AC \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SC \perp CB \quad \Rightarrow \quad \Delta SBC \text{ vuông tại } C.$$

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SD \perp DC \quad \Rightarrow \quad \Delta SCD \text{ vuông tại } D.$$

b) *Cách dựng :*



Trong tam giác SAD kẻ $AE \perp SD$.

Qua E dựng đường thẳng song song với DC cắt SC tại I. Qua I kẻ đường thẳng song song với AE cắt AB ở J; IJ là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Ta tính được $IJ = AE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

476 Lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều, cạnh a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$.

Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và B'C.

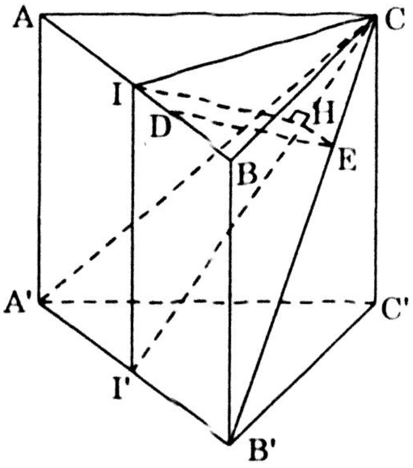
Hướng dẫn

A'B' // AB nên mp (A'CB') là mặt phẳng chứa B'C và song song với AB.

Gọi I, I' theo thứ tự là trung điểm của AB, A'B'

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A'B' \perp II' \\ A'B' \perp CI' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A'B' \perp (CII')$$

$$\Rightarrow \quad (CII') \perp (CA'B')$$



Từ I kẻ $IH \perp CI'$. Qua H kẻ HE // IB và qua E kẻ đường song song với IH cắt AB ở D; DE là đoạn vuông góc chung của AB, CB'.

Từ $\quad CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \quad II' = a\sqrt{2},$

ta tính được $\quad IH = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$.

477 Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có các kích thước AB = 2a, AD = a và AA' = 3a.

a) Tính góc hợp bởi đường chéo A'C và mp đáy (ABCD).

b) Tính đoạn vuông góc chung của A'C và BB'.

Hướng dẫn

Đáp số : **a)** 53° 18'. **b)** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

478 Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Độ dài của đoạn thẳng nối tâm của hai mặt bên kề nhau là 2a. Gọi G là trọng tâm của tam giác AB'D'.

a) Chứng minh ba điểm A', G, C thẳng hàng và A'C ⊥ (AB'D')

A'C ⊥ (C'DB).

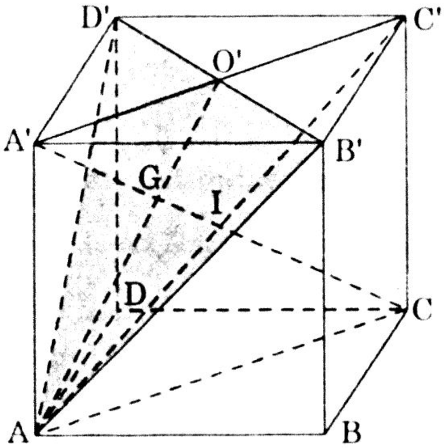
b) Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường chéo nằm trong hai mặt bên kề nhau và không xuất phát từ đỉnh chung của hai mặt bên ấy.

Hướng dẫn

a) Gọi G là giao điểm của A'C với mp (AB'D') và gọi O' là tâm của hình vuông A'B'C'D'; I là giao điểm của A'C và AC'.

Dễ thấy G ∈ A'I và G ∈ AO'. Trong ΔAA'C' thì do O' là trung điểm của A'C' và I là trung điểm của AC' nên G là trọng tâm của ΔAA'C', cho ta

$$\frac{AG}{AO'} = \frac{2}{3}.$$



Đối với tam giác AB'D' thì AO' là trung tuyến thuộc cạnh D'B' mà $\frac{AG}{AO'} = \frac{2}{3}$ suy ra G cũng là trọng tâm của ΔAB'D'.

Vậy A', C và trọng tâm G của ΔAB'D' là ba điểm thẳng hàng.

Ta có B'D' ⊥ (AA'C'C) ⇒ B'D' ⊥ A'C (1)

AD' ⊥ (DA'B'C) ⇒ AD' ⊥ A'C (2)

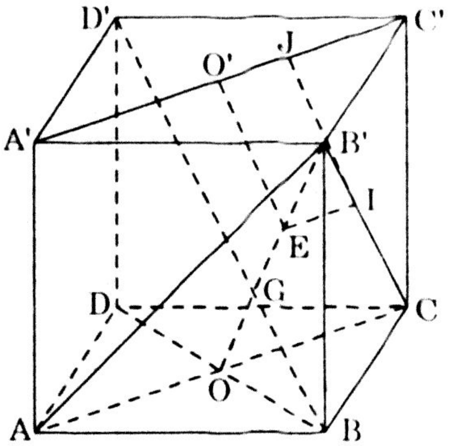
Từ (1) và (2) suy ra A'C ⊥ (AB'D') (3).

Ta lại có (AB'D') // (C'BD) (4).

Từ (3) và (4) suy ra A'C ⊥ (C'BD).

b) Ta dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường chéo A'C' và B'C của hai mặt bên (A'B'C'D') và (B'C'CB).

Theo kết quả câu a) ta có D'B ⊥ (AB'C). Mặt phẳng (AB'C) chính là mặt phẳng chứa B'C và song song với A'C'. Từ trung điểm O' của A'C', ta kẻ AE // D'B thì AE ⊥ (AB'C). Từ E kẻ EI // O'E và từ I kẻ IJ // E'O thì IJ là đoạn vuông góc chung của A'C' và B'C.



Vì đoạn nối tâm hai mặt bên kề nhau của lập phương có độ dài 2a nên ta suy ra đường chéo của mặt bên lập phương là 4a và cạnh của lập phương là $2a\sqrt{2}$. Ta có :

$$D'B = AB\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad D'B = 2a\sqrt{6}$$

$$D'G = \frac{2}{3}D'B \quad \Rightarrow \quad D'G = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$$

$$IJ = O'E = \frac{1}{2}D'G \quad \Rightarrow \quad IJ = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

479 Cho hai tam giác cân, ACD và BCD, đáy chung DC = 2x; nằm trong hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Các cạnh khác của hai tam giác là a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính AB, MN theo x và a.

c) Xác định giá trị của x để (ABC) ⊥ (ABD). Trong trường hợp này, tính AB và tìm điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D.

Hướng dẫn

a) Độc giả tự giải. **b)** $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

c) $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

480 Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi, các đường chéo AC = a, BD = b. Hình chiếu của đỉnh S trên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm của hai đường chéo và chiều cao của hình chóp hợp với cạnh bên SA một góc 30^0.

a) Dựng thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh A và vuông góc với cạnh SC.

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b.

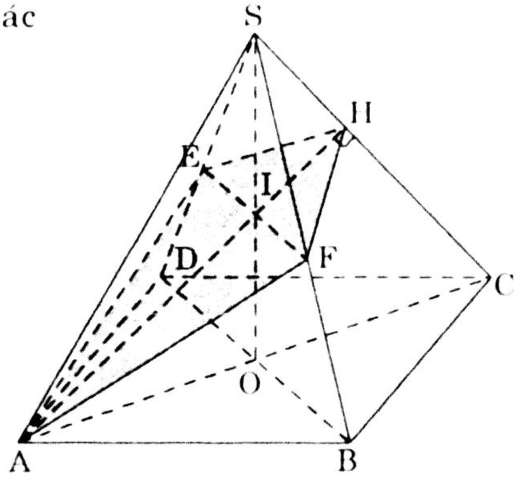
Hướng dẫn

a) *Cách dựng :* Trong mp SAC, kẻ AH ⊥ SC. AH cắt SO ở điểm I. Trong mp (SBD) qua I kẻ đường thẳng song song với DB, cắt SB ở F và cắt SD ở E. Tứ giác AEHF là thiết diện cần dựng.

b) Tứ giác AEHF có hai đường chéo vuông góc EF ⊥ AH nên

$$S_{AEHF} = \frac{1}{2}AH.EF.$$

Từ giả thiết, ta suy ra ΔSAC là tam giác đều cạnh a.



$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$SI = \frac{2}{3}SO$$

$$\Rightarrow \quad EF = \frac{2}{3}DB = \frac{2}{3}b$$

Cho ta $S_{AEHF} = \dfrac{ab\sqrt{3}}{6}$.

481 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, tâm O, cạnh a; SA = SB = SC = SD = a.

a) Tính chiều cao hình chóp.

b) Tính góc hợp bởi các mặt bên với mặt đáy.

c) Tính khoảng cách từ tâm O đến các mặt bên.

d) Dựng và tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng (P) đi qua cạnh AB và vuông góc với mp (SDC).

Hướng dẫn

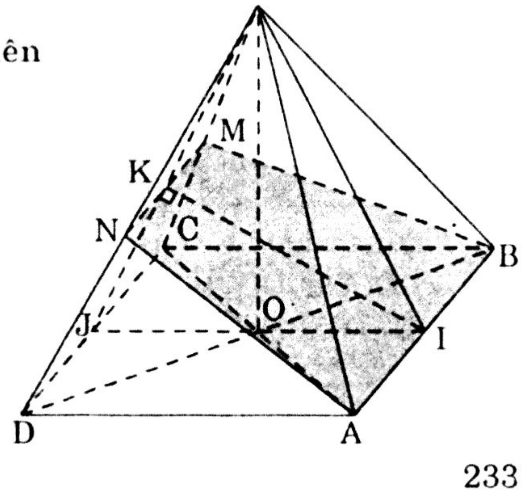
Đáp số : **a)** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **b)** $54^0 44'$ **c)** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

Trong mp (SIJ) kẻ IK ⊥ SJ. Qua K kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SC ở M, cắt SD ở N; dễ thấy IK ⊥ (SCD) nên (ABMN) ⊥ (SCD).

Tứ giác ABMN là thiết diện phải dựng.

ABMN là hình thang, có chiều cao KI nên

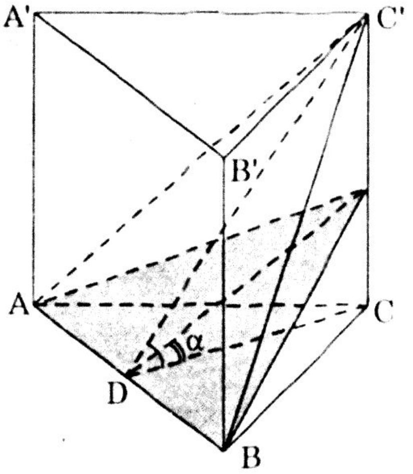


$$S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN).IK$$

Ta tính được $IK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; $MN = \dfrac{a}{3}$

$$\Rightarrow \quad S_{ABMN} = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}.$$

482 Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' cạnh đáy a và chiều cao h = 2a. Dựng và tính diện tích thiết diện của lăng trụ cắt bởi mp (P) chứa cạnh AB và hợp với mặt phẳng đáy một góc α.



Hướng dẫn

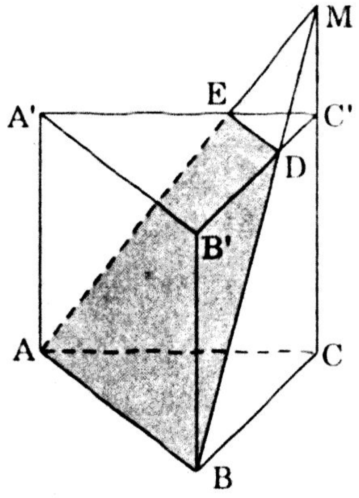
Gọi D là trung điểm của cạnh AB ta có :

$$\tan\widehat{C'DC} = \frac{CC'}{DC} = \frac{2a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\widehat{C'DC} \approx 2{,}3094$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{C'DC} \approx 66^0\,35'.$$

Ta xét ba trường hợp :



a) $\alpha < 66^0\,35'$ thì (P) cắt cạnh CC' tại một điểm M thuộc đoạn thẳng CC'. Lúc đó thiết diện là tam giác ABM có diện tích

$$S_{ABM} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}.$$

b) $$\alpha = \widehat{C'DC}$$

$$\Rightarrow \quad S_{ABC'} = a^2\sqrt{13}$$

c) Khi $\alpha > 66^0\,35'$ thiết diện là hình thang ABMN.

$$S_{ABMN} = \frac{2\sqrt{3}a^2\cos\alpha(\sqrt{3}\tan\alpha - 2)}{3\sin^2\alpha}.$$

483 Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi E, F và M theo thứ tự là trung điểm của AD, AB, CC'.

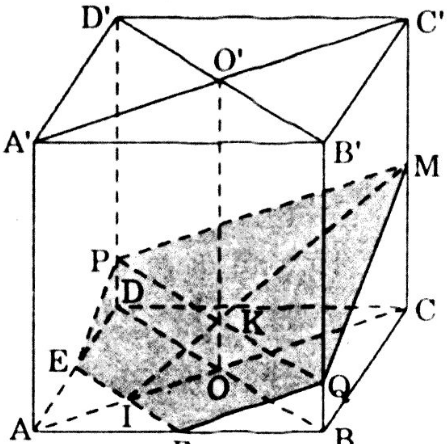
a) Dựng thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (EFM).

b) Tính góc φ giữa hai mp (ABCD) và (EFM).

c) Tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn

a) *Cách dựng* : Gọi I là giao điểm của EF và AC; IM cắt OO' tại K. Qua K dựng đường thẳng song song với BD, cắt DD' tại P và cắt BB' tại Q. Thiết diện cần dựng là hình ngũ giác EFQMP.



b) *Đáp số* : $\varphi = \widehat{MIC} \approx 25^0 14'$. **c)** $S_{EFQMP} = \dfrac{7a^2\sqrt{11}}{24}$.

484 Hình chóp S.ABCD có đáp ABCD là hình vuông, cạnh a, SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA = a.

a) Cho biết hình dạng các mặt bên của hình chóp.

b) Dựng thiết diện hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua đỉnh A và vuông góc với cạnh SC.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

485 Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh B; cạnh AB = a; cạnh bên hình chóp SA ⊥ (ABC) và SA = $a\sqrt{3}$; E là trung điểm của SC và I là điểm thuộc cạnh AB.

a) Dựng thiết diện hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (SAB), đi qua điểm E và điểm I.

b) Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của thiết diện theo a và b, trong đó b là độ dài của đoạn thẳng AI.

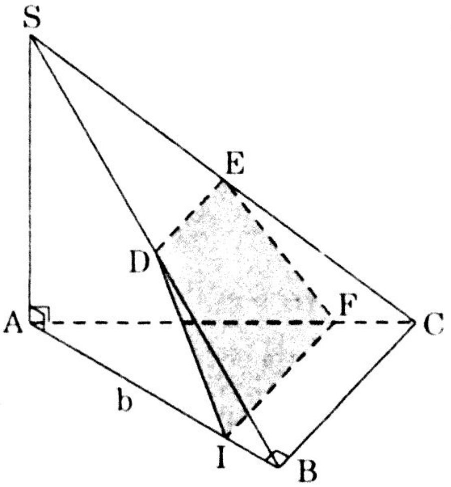
Hướng dẫn

a) Dễ thấy CB ⊥ (SAB) $\Rightarrow$ CB // (P).

(P) cắt mp (SBC) theo giao tuyến ED // CB

$\Rightarrow$ D là trung điểm của SB.

(P) cắt mp (ABC) theo giao tuyến IF // CB.



b) Thiết diện DEFI là hình thang vuông, đáy DE và IF, chiều cao DI.

Ta có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0$.

ΔDIB có IB = a – b; $DB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $\widehat{DBA} = 60^0$.

Sử dụng định lí cosin ta tính được $DI^2 = b^2 - ab + a^2$.

Dễ thấy $DE = \dfrac{a}{2}$; $IC = \dfrac{b}{a}$

$$\Rightarrow S_{DEFI} = \frac{1}{4}(a + 2b)\sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

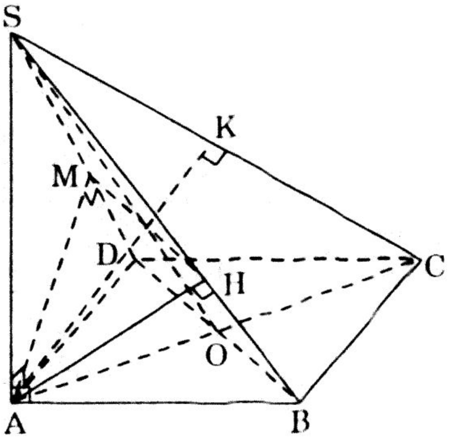
486 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O; SA ⊥ (ABCD). Kẻ AH, AK, AM theo thứ tự vuông góc với SB, SC, SD.

a) Chứng minh BC ⊥ (SAB); CD ⊥ (SAD); BD ⊥ (SAC).

b) Chứng minh AH ⊥ SC; AK ⊥ SC.

Có thể kết luận gì về ba đường thẳng AH, AK, AM.

c) Chứng minh KM ⊥ AM.



Hướng dẫn

a) Độc giả tự giải.

b) Chứng minh AH ⊥ (SBC), ba đường thẳng AH, AK, AM đồng phẳng.

b) Chứng minh AM ⊥ (SCD).

487 Cho tứ diện ABCD. Kẻ AA' ⊥ (BCD) và BB' ⊥ (ACD).

a) Giả sử AB ⊥ DC và AD ⊥ BC. Chứng minh rằng A' là trực tâm của tam giác BCD, suy ra rằng các cạnh đối AC và BD cũng vuông góc với nhau.

b) Ngược lại, chứng minh rằng nếu A' là trực tâm của tam giác BCD và B' là trực tâm của tam giác ACD thì tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

c) Chứng minh rằng nếu tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì bốn đường cao của tứ diện đồng quy.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

488 Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông góc tại A và D; AB = 2a; AD = DC = a và cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD); SA = a.

a) Chứng minh (SAD) ⊥ (SDC) và (SAC) ⊥ (SCB).

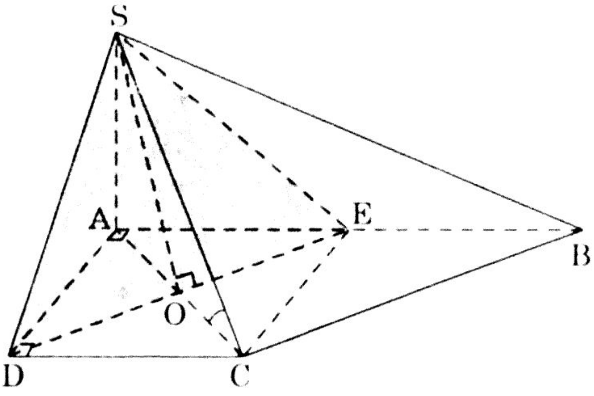
b) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và đáy (ABCD). Tính tanφ.

c) (α) là mặt phẳng qua SD và vuông góc với mp (SAC). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) và tính diện tích thiết diện.

Hướng dẫn

a) $$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ AD \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad SD \perp DC$$ (định lí 3 đường vuông góc)

$$\left.\begin{array}{l} SD \perp DC \\ AD \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow \quad DC \perp (SAD)$$



Kết hợp với $DC \subset (SDC)$ suy ra

$(SAD) \perp (SDC)$.

Gọi E là trung điểm của AB

$\Rightarrow \quad CE = AE = BE$

$\Rightarrow \quad \Delta ACB$ vuông tại C

$\Rightarrow \quad AC \perp CB$.

Từ đây chứng minh như trên ta được $(SAC) \perp (SCB)$.

b) Do $BC \perp SC$ và $BC \perp CA$ nên góc $\widehat{SCA}$ bằng góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và đáy (ABCD) hay $\varphi = \widehat{SCA}$.

Ta có $\quad \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 35^0 15'$.

c) Tứ giác ADCE là hình vuông $\Rightarrow DE \perp AC$. Kết hợp vì $DE \perp SA \Rightarrow DE \perp (SAC)$, suy ra $DE \subset (\alpha)$. Thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng α chính là tam giác ADE. Dễ thấy nếu gọi O là tâm của hình vuông ADCE thì $DE \perp (SAC) \quad \Rightarrow \quad DE \perp SO$

$$\text{và} \qquad S_{ADE} = \frac{1}{2} DE.SO$$

Từ đây ta tính được $S_{ADE} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

489 Cho tam giác đều SAD và hình vuông ABCD cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi I là trung điểm của AD, M là trung điểm của AB, F là trung điểm của SB và K là giao điểm của CM và BI.

a) Chứng minh $(CMF) \perp (SIB)$.

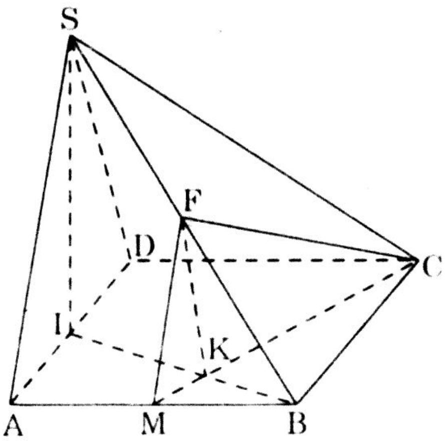
b) Chứng minh ΔBKF cân.

c) Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SD.

Hướng dẫn

a) Trong hình vuông ABCD thì $CM \perp BI$. Từ giả thiết, ta cũng chứng minh được $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CM$.

Do vậy $CM \perp (SIB)$ mà $CM \subset (CMF)$ nên $(CMF) \perp (SIB)$.



b) Trong tam giác vuông MBC, BK là đường cao thuộc cạnh huyền CM.

Với $BM = \frac{a}{2}$, $BC = a$, ta tính được $BK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Từ tam giác vuông SIB ta tính được $SB = a\sqrt{2} \Rightarrow FB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta tính FK bằng cách áp dụng định lí cosin vào tam giác FKB :

$$FK^2 = BF^2 + BK^2 - 2BF.BK.\cos\widehat{FBK}$$

Với các thông tin : $BF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $BK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$;

$$\cos\widehat{FBK} = \frac{IB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \quad \text{hay} \quad \cos\widehat{FBK} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

ta tính được $FK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Vậy FK = BK (đpcm).

c) Mặt phẳng (SCD) là mặt phẳng chứa SD và song song với AB.

Hai mặt phẳng (SAD) và (SDC) vuông góc với nhau và giao nhau theo giao tuyến SD. Ta kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SDC) \Rightarrow AE \perp SD$.

Dễ thấy $AB \perp (SAD) \Rightarrow AE \perp AB$.

Vậy AE là đoạn vuông góc chung của AB và SD. Ta có ΔSAB đều, AE là đường cao : $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

490 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh B, AB = 2a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A, ta lấy một điểm S.

a) Chứng minh mp $(SAB) \perp (ABC)$; $(SAC) \perp (ABC)$.

b) Chứng minh $BC \perp (SAB)$. Suy ra $(SBC) \perp (SAB)$.

c) Đặt SA = x; BC = y.

Tìm một hệ thức liên hệ giữa a, x, y để có SC = x + y.

Hướng dẫn

a, b) Độc giả tự giải. **c)** $xy = 2a^2$.

491 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (O; a) đường kính BC và điểm A là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, ta lấy điểm S sao cho SA = a.

a) Chứng minh (SAB) ⊥ (SAC).

b) Tính góc nhị diện hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (P).

c) Qua một điểm M bất kì ta dựng mặt phẳng (Q) vuông góc với bán kính OA. Dựng thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (Q). Thiết diện này là hình gì ? Đặt AM = x. Tính diện tích thiết diện theo a, x.

Hướng dẫn

b) *Đáp số* : 45°.

c) Thiết diện là hình chữ nhật. $S_{\text{thiết diện}} = 2(a - x)x$.

492 Trong mặt phẳng (P) cho nửa lục giác đều ABCD nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AD = 2a. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, ta lấy điểm S. Biết SA = AB = BC = CD = a.

a) Chứng minh BD ⊥ (SAB) và SC ⊥ CD.

b) Chứng tỏ rằng có một điểm O cách đều năm điểm S, A, B, C, D. Xác định vị trí điểm O và khoảng cách từ O đến các điểm S, A, B, C, D.

c) Từ một điểm M thuộc đoạn thẳng AB với AM = x, ta dựng một mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (SAD).

- Dựng thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (Q).
- Giả sử (Q) cắt SB, SC, SD theo thứ tự tại N, P, Q. Tứ giác MNPQ là hình gì ? Tính diện tích MNPQ theo a và x.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

493 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (O) có đường kính AB. Một đường thẳng Δ đi qua A và vuông góc với (P) và đường thẳng Δ' đi qua B, Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau.

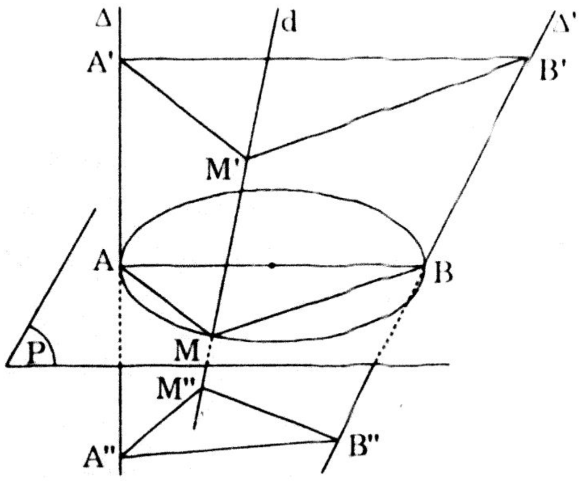
a) Cho điểm M nằm trên đường tròn (O) với M ≠ A và M ≠ B. Chứng minh rằng qua M chỉ có thể dựng được một đường thẳng d cắt Δ và Δ'. Chứng minh hai mặt phẳng (M, Δ) và (M, Δ') vuông góc với nhau.

b) Một mặt phẳng (Q) vuông góc với Δ, cắt Δ, d, Δ' theo thứ tự tại các điểm A', M', B'. Cho biết hình dạng của tam giác A'M'B'.

c) Một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ', cắt Δ, d, Δ' theo thứ tự tại A'', M'', B''. Cho biết hình dạng của tam giác A''M''B''.

Hướng dẫn

a) $\Delta \perp (P) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \Delta \perp MB \\ MA \perp MB \end{matrix}\right\} \Rightarrow MB \perp (M; \Delta)$



Kết hợp với $(M, \Delta') \supset MB$

Suy ra $(M, \Delta) \perp (M, \Delta')$.

b) $$\left.\begin{array}{l}(Q)\perp\Delta\\ (P)\perp\Delta\end{array}\right\} \Rightarrow (P)\,//\,(Q)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}M'A'\,//\,MA\\ M'B'\,//\,MB\\ MA\perp MB\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow M'A' \perp M'B'$$

$\Rightarrow$ $\Delta A'M'B'$ vuông góc tại M'.

c) $\Delta' \perp (R)$ mà $\Delta' \subset (M'', \Delta')$ nên $(R) \perp (M'', \Delta')$. Ta đã có $(M'', \Delta) \perp (M'', \Delta')$ mà (M'', Δ) và (R) cũng vuông góc với (M'', Δ') và chúng cắt nhau theo giao tuyến $M''A''$ nên $M''A'' \perp (M'', \Delta')$.

Kết hợp với $M''B'' \subset (M'', \Delta')$

Suy ra $M''A'' \perp M''B''$.

hay $\Delta A''M''B''$ vuông tại M''.

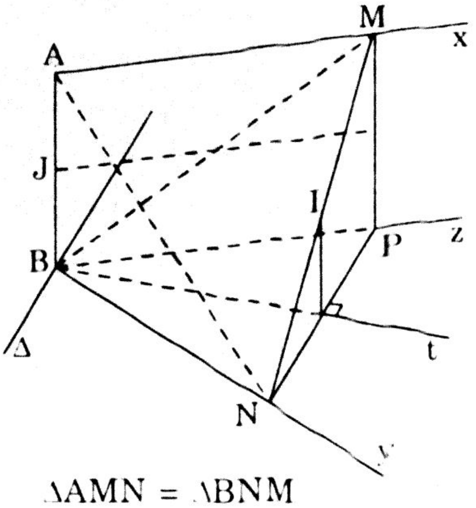
494 Cho hai tia Ax, By có đoạn vuông góc chung là AB. Trên Ax có một điểm M và trên By có một điểm N sao cho AM = BN.

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định và MN tạo với Ax và By các góc bằng nhau.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm quỹ tích điểm I khi M và N di chuyển trên Ax, By.

c) Qua M dựng mp (P) vuông góc với Ax và qua N dựng mp (Q) vuông góc với By. Gọi Δ là giao tuyến của (P), (Q). Chứng tỏ rằng Δ nằm trong một mặt phẳng cố định khi M, N di chuyển.

Hướng dẫn



a) Qua B dựng tia Bz // Ax. Trên Bz lấy điểm P để BP = AM $\Rightarrow$ BP = BN $\Rightarrow$ ΔNBP cân đỉnh B. Kẻ tia phân giác Bt của góc zBy; gọi Δ là đường thẳng song song với NP kẻ qua B thì $\Delta \perp Bz$ $\Rightarrow$ Δ là đường thẳng cố định. Dễ thấy $(MNP)\,//\,(B;\Delta)$

$\Rightarrow MN\,//\,(B;\Delta)$.

$\Delta ABM = \Delta BAN \Rightarrow AN = BM$ suy ra $\Delta AMN = \Delta BNM$

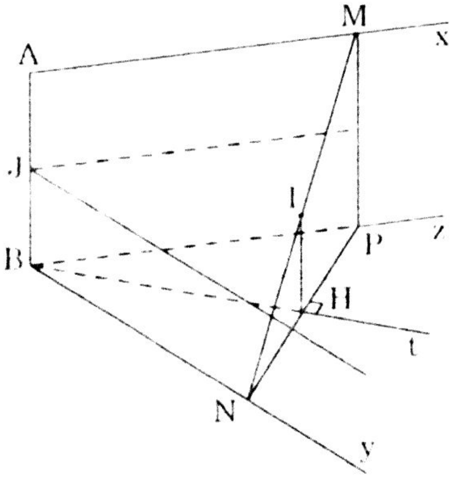
$$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{BNM}.$$

b) Kẻ IH ⊥ (Byz)

Dễ thấy $IH = \frac{1}{2}AB$ = không đổi.

Quỹ tích I là mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm J của AB và song song với Ax, By.

c) Δ nằm trong mp (AB; Bt).



495 Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2a và C là một điểm thuộc đường tròn (O) với BC = a. Dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) và lấy trên đó một điểm S sao cho SA = 2a.

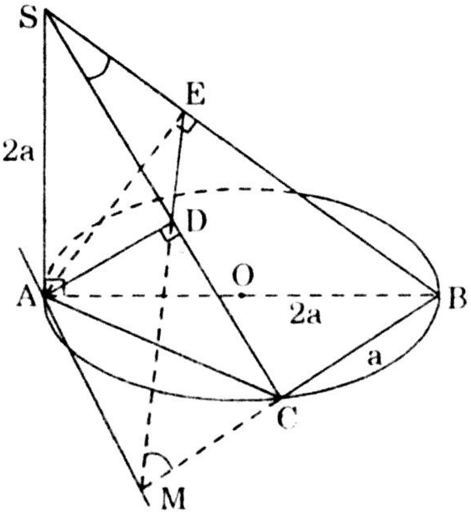
a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SCB).

b) Kẻ AD ⊥ SC và AE ⊥ SB. Chứng minh (ADE) ⊥ (SCB).

Tính các cạnh của tam giác ADE theo a.

c) Xác định giao điểm M của đường thẳng DE với mặt phẳng (P). Tính MB theo a. Có nhận xét gì về vị trí tương đối của MA và đường tròn O.

Hướng dẫn



a) BC ⊥ (SAC) ⇒ (SBC) ⊥ (SAC).

b) BC ⊥ (SAC) ⇒ BC ⊥ AD

SC ⊥ AD

⇒ AD ⊥ (SBC)

⇒ (ADE) ⊥ (SBC)

Ta có $AC = a\sqrt{3}$.

Tam giác vuông cân ASB cho ta

$AE = a\sqrt{2}$

Tam giác vuông SAC cho ta

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

AD ⊥ (SBC) ⇒ AD ⊥ ED ⇒ ΔADE vuông tại D.

$$AE^2 - AD^2 = DE^2 \quad \Rightarrow \quad DE = \frac{a\sqrt{14}}{7}.$$

c) Trong mặt phẳng (SBC), hai đường thẳng ED và BC cắt nhau tại M, ta có $M \in ED$

$$M \in BC \quad \text{mà} \quad BC \subset (P) \quad \Rightarrow \quad M \in (P).$$

Vậy M là giao điểm của DE với mp (P).

496 Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh C. Trên đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A, lấy một điểm S.

a) Chứng minh rằng các mặt của tứ diện SABC là các tam giác vuông.

b) Kẻ đường cao AD của tam giác SAB và đường cao AF của tam giác SAC. Tìm quỹ tích của D, F khi S di chuyển trên Δ.

c) Chứng minh $AF \perp (SBC)$.

d) Xác định vị trí của điểm O cách đều năm điểm A, B, C, D, F.

e) Chứng minh $DF \perp SB$ và $DF \perp AF$.

f) Chứng minh rằng khi S di chuyển trên đường thẳng Δ thì đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định trên đường thẳng BC.

Hướng dẫn

Độc giả tự giải.

497 Cho hai tam giác cân ABC và BCD theo thứ tự nằm trong hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Cạnh CD = 2x và các cạnh còn lại bằng a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

a) Chứng minh đoạn thẳng IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng AB theo a và x.

c) Xác định giá trị x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

a) Dễ thấy $\left.\begin{array}{l} AJ \perp CD \\ BJ \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (AJB)$

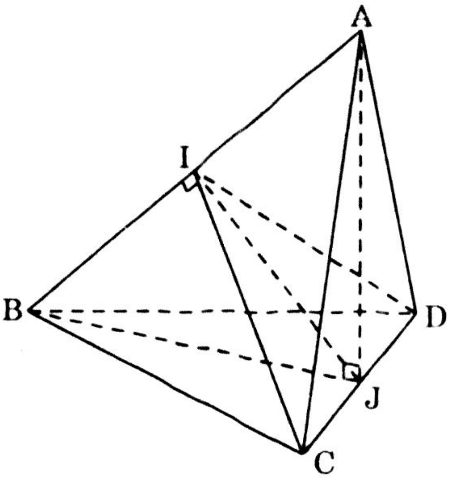
$$\Rightarrow CD \perp IJ$$

Chứng minh tương tự ta có $AB \perp IJ$

Suy ra đpcm.

b) $AB^2 = AJ^2 = BJ^2$ với $AJ^2 = AD^2 - JD^2$

và $AD = a;\ JD = a$



$$\Rightarrow \quad AJ^2 = a^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad AB^2 = 2(a^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$$

Tam giác vuông AJB cho ta $JI = \frac{1}{2}AB \quad \Rightarrow \quad IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

c) Do $CI \perp AB$ và $DI \perp AB$ nên góc $\widehat{CID}$ bằng góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Ta tính được $CI^2 = DI^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$ và $CD^2 = 4x^2$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác CID.

$$CD^2 = CI^2 + DI^2 - 2.CI.DI.\cos\widehat{DIC}$$

ta tính được $\cos\widehat{DIC} = \dfrac{3x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

$$\widehat{CID} = 90^0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

498 Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD, cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ta lấy điểm S sao cho SA = a.

a) Chứng minh các tam giác SAB, SBC, SCD là các tam giác vuông. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

b) Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

c) Kẻ $AH \perp SO$. Chứng minh H là trực tâm của tam giác SBD. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

Hướng dẫn

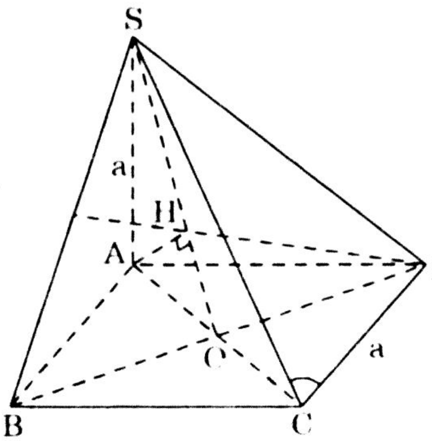
a) Sử dụng định lí 3 đường vuông góc.

Do AB // CD nên góc giữa 2 đường thẳng AB và SC bằng góc $\widehat{SCD}$. Ta tính được $SD = a\sqrt{2}$

$$\tan\widehat{SCD} = \frac{SD}{CD}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\widehat{SCD} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{SCD} \approx 54^0 43'.$$



b) $BD \perp AC \quad (1)$

$SA \perp (ABCD) \quad \Rightarrow \quad SA \perp AC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra dpcm.

c) BD ⊥ (SAC) ⇒ $\left.\begin{matrix} BD \perp AH \\ SO \perp AH \end{matrix}\right\}$ ⇒ AH ⊥ (SBD)

⇒ AH ⊥ SB (3)

Dễ thấy AD ⊥ (SAB) ⇒ AD ⊥ SB (4)

Từ (3) và (4) suy ra SB ⊥ (AHD) ⇒ SB ⊥ DH

hay DH là một đường cao của ΔSBD (5)

Mặt khác do BD ⊥ (SAC) ⇒ BD ⊥ SO

hay SO là một đường cao của ΔSBD (6)

Từ (5) và (6) suy ra đpcm.

AH là khoảng cách từ điểm A đến mp (SBD).

Tam giác vuông SAD với AH ⊥ SO cho ta : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2}$.

Ta tính được $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

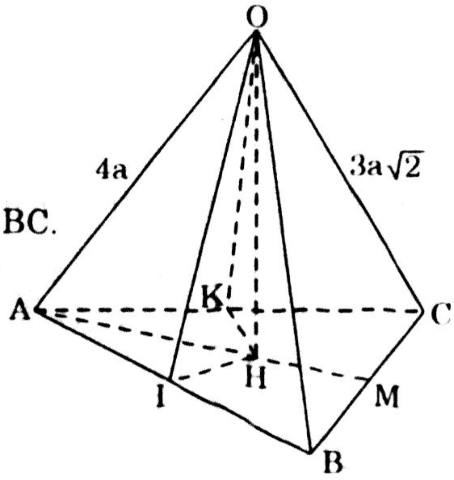
499 Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = 4a, OB = OC = $3a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ O đến mp (ABC).

b) Chứng minh các cặp cạnh đối của tứ diện thì vuông góc với nhau.

c) Xác định đoạn vuông góc chung của các cặp cạnh đối của tứ diện.

Hướng dẫn



a) Kẻ OH ⊥ (ABC) và HK ⊥ AC, HI ⊥ AB.

Do Δ AOB = ΔAOC ⇒ HI = HK

⇒ H nằm trên phân giác AM của $\widehat{BAC}$

ΔABC cân đỉnh A nên M là trung điểm của BC.

OA ⊥ (OBC) ⇒ OA ⊥ OM

Trong tam giác vuông OAM, OH là đường cao

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}$$

Tam giác OBC vuông tại O và OB = OC = $3a\sqrt{2}$ nên trung tuyến

$$OM = OB.\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad OM = 3a;$$

Kết hợp với OA = 4a, ta tính ra $OH = \frac{12}{5}a$.

b) $\left.\begin{matrix} OA \perp OC \\ OA \perp OB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad OA \perp (OBC) \Rightarrow \quad OA \perp BC.$

Tương tự, ta có $\quad OB \perp AC \quad$ và $\quad OC \perp AB.$

c) Dễ thấy $OM \perp BC$ và $OM \perp OA \Rightarrow OM$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC;

OI là đoạn vuông góc chung của AB và OC;

OK là đoạn vuông góc chung của AC và OB.

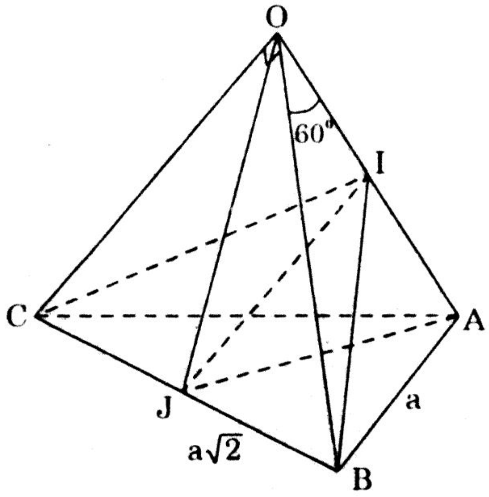
500 Cho tứ diện OABC có $OA = OB = OC = a$; $\widehat{BOC} = 90^0$; $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$. Gọi I, J theo thứ tự là các trung điểm của các đoạn thẳng OA, BC.

a) Tính AB, BC, CA.

b) Chứng minh $OA \perp BC$ và IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng OA, BC.

c) Chứng minh hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

Hướng dẫn



a) $AB = BC = a; \qquad AC = a\sqrt{2}.$

b) ΔOAD đều $\Rightarrow \quad BI \perp OA$

Tương tự, ta có $\quad CI \perp OA$

$\Rightarrow \quad OA \perp (BIC)$

$\Rightarrow \quad OA \perp BC$

Ta cũng có $\quad OA \perp IJ$

$IB = IC \quad \Rightarrow \quad BC \perp IJ$

$\Rightarrow$ **IJ là đoạn vuông góc chung của OA, BC.**

c) Ta có $\quad OJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; \quad AJ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $\quad OA = a$

$\Rightarrow \quad OA^2 = OJ^2 + AJ^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta OJA$ vuông tại J

$\Rightarrow \quad OJ \perp JA$

Mặt khác $\quad OJ \perp BC \quad \Rightarrow \quad OJ \perp (ABC)$

Suy ra $\quad (OBC) \perp (ABC).$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA, BC bằng độ dài của đoạn vuông góc chung IJ. Ta tính được : $IJ = \dfrac{a}{2}$.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Chương I : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Các hàm số lượng giác 3
§2. Phương trình lượng giác cơ bản 9
§3. Một số dạng phương trình lượng giác đơn giản 16

Chương II : TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

A. TỔ HỢP 33
Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp 33
B. XÁC SUẤT 43

Chương III : DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp 54
§2. Dãy số 58
§3. Cấp số cộng và cấp số nhân 66

Chương IV : GIỚI HẠN

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ 75
§1. Dãy số có giới hạn 75
§2. Dãy số dần đến vô cực 84
B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ – HÀM SỐ LIÊN TỤC 88
§3. Giới hạn của hàm số 88
§4. Giới hạn một bên 92
§5. Một số quy tắc tìm giới hạn vô cực 92
§6. Các dạng vô định 95
§7. Hàm số liên tục 99

Chương V : ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 102
§2. Các quy tắc tính đạo hàm 103
§3. Đạo hàm của hàm số lượng giác 110
§4. Vi phân 111
§5. Đạo hàm cấp cao 111
Bài tập ôn chương V 119
BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM 121

PHẦN HÌNH HỌC

Chương I : PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1 Các phép dời hình trong mặt phẳng 127

§2 Phép vị tự và phép đồng dạng 140

Ôn tập chương I 144

Chương II : ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1 Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 148

§2 Quan hệ song song 161

Ôn tập chương II 181

Chương III : VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1 Vectơ trong không gian 186

§2 Quan hệ vuông góc 191

Ôn tập chương III 236

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04)39714899; (04)39714897. Fax: (04)39714897

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: MINH HẢI
Sửa bài: THÁI VĂN
Trình bày bìa: PHẠM VIỆT QUANG

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

---

500 BÀI TOÁN CƠ BẢN VÀ MỞ RỘNG 11
Mã số: 1L - 310ĐH2010
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 462 - 2010/CXB/9 - 81/ĐHQGHN, ngày 13/05/2010.
Quyết định xuất bản số: 310LK - TN/QĐ - NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2010.